

# 反応拡散系に現れるカオスの挙動

小林 俊介 (Shunsuke Kobayashi) \*

## 1 導入

カオス現象とは、「解の振る舞いが決定論的システムに従うにも関わらず、僅かな数値誤差に鋭敏に依存し、予測不可能な挙動を示す」というパラドキシカルな現象である。例えば、紙の自由落下における軌道や天気予報の長期予測不可能性などが卓近な例である。決定論的システムに従うにも関わらず、些細な誤差により将来の予測ができないという事実は、我々の常識を覆すものであり、バタフライ効果とも呼ばれ、世界中で注目を浴び続けている。この現象は微分方程式などにも姿を現わす。最も有名な例はローレンツ方程式 ([6]) であろう。これについては精度保証付き数値計算の援用により、解の挙動がカオスであることが数学的に示されている ([11])。また、化学反応物質の濃度変化など、様々な現象を再現するモデルとして盛んに研究されている反応拡散系においても、数値的にはカオス現象が観測されている ([7])。

しかし、反応拡散系も含めた偏微分方程式におけるカオス現象の結果の殆どが数値的な報告であり、解析的な結果は講演者の知る限り存在しない。冒頭で述べたように、カオス現象は初期値などを真の値で計測できない限り、精度保証付き数値計算を除けば、その存在性を保証することは不可能である。したがって、カオス現象の解析的解決は重要課題である。特に工学に関連する分野では、複雑な振る舞いを見せる数値実験結果が数多くあり、そのシミュレーション予測精度の向上などの為にも、数学的解明は喫緊の課題の一つである。

このようなモチベーションの下、講演者はこれまでに以下のような積分項をもつ反応拡散系に現れるカオスの挙動について、局所分岐理論の立場から考察してきた：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v) + \frac{s}{L} \int_0^L u(t, x) dx, & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v), & x \in (0, L), \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここでは、Neumann 境界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) = 0 \quad (1.2)$$

の下で考察する。  $u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,  $v(t, x) \in \mathbb{R}$  は未知関数であり、  $D_1 > 0$  は  $u$  の拡散係数、  $D_2 > 0$  は  $v$  の拡散係数、  $s > 0$  は積分項のコントロールパラメータである。なお、これは化学電気実験における数理モデルとして導出されたものである ([8])。反応拡散方程式系 (1.1)–(1.2) の定める力学系の相空間を

$$X := \{(u, v) \in H^2(0, L) \times H^2(0, L); u_x(t, 0) = u_x(t, L), v_x(t, 0) = v_x(t, L) = 0\}$$

とする。システム (1.1) に対して次の仮定をおく：

---

\* 明治大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程 1 年 (〒214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1, E-mail: s.kobayashi.meiji@gmail.com)

**Assumption 1.** 反応項  $f(u, v), g(u, v)$  は十分滑らかであり  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  かつ

$$f_u > 0, \quad f_v < 0, \quad g_u > 0, \quad g_v < 0, \quad \frac{f_v g_u}{g_v} + g_v < 0$$

を満たす. さらに, システム (1.1) は自明解においてチューリング不安定性をもつ. すなわち

$$f_u + g_v < 0 \quad \text{かつ} \quad f_u g_v - f_v g_u > 0$$

が成り立っている. したがって, 自明解から空間非一様な定常解が分岐しうる. ここで

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0), \quad f_v = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0), \quad g_u = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0), \quad g_v = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0).$$

現在までに, システム (1.1) に対してカオス的な挙動をする解が数値的に報告されている ([1, 9, 10]). 例えば, 以下のようにパラメータと反応項をおく:

$$D_1 = 0.25, \quad f(u, v) = u - 10v - u^2 - 2u^3, \quad g(u, v) = 2u - 5v - 0.8u^2, \\ D_2 = 26.877118, \quad s = 2.98901, \quad \frac{\pi}{L} = 0.86008.$$

このときの数値計算によって得られた数値解を図 1 に示す.

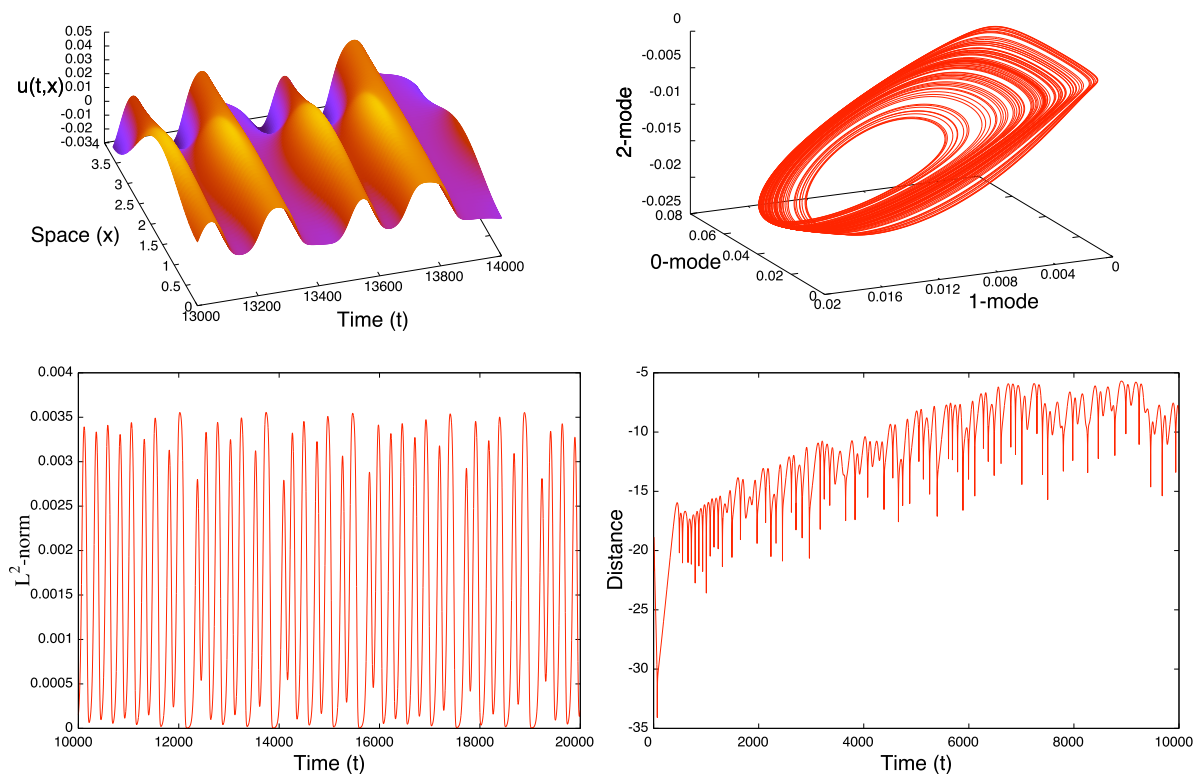


図 1.1 3 重臨界点付近におけるシステム (1.1) の数値解.

上段左図は  $u(t, x)$  の  $(t, x) \in [13000, 14000] \times [0, L]$  における鳥瞰図であり, 上段右図は高速フーリエ変換によって得られた, フーリエ空間上における  $(u_0(t), u_1(t), u_2(t))$  の軌道を表している. ここで  $u_j$

は  $u(t, x)$  の  $j$  番目のフーリエ係数を表している．また，下段左図は  $u(t, x)$  の  $L^2$ -ノルム  $\|u\|_{L^2}(t)$  を表しており，下段右図は初期値鋭敏性を表すグラフである．横軸は時間  $t$ ，縦軸は解の誤差の  $\log$  プロット： $\log |\|u^1\|_{L^2}(t) - \|u^2\|_{L^2}(t)|$  である．ここで， $(u^2(t, x), v^2(t, x))$  は初期値を  $(u^2(0, x), v^2(0, x)) = (u^1(0, x), v^1(0, x)) + (10^{-6}, 0)$  として得られるシステム (1.1) の数値解である．

このように，数値的にはカオスの挙動をする解が観測される．ここで自然に浮かぶ疑問は

1. どのようにしてパラメータを選んでいるのか；
2. どのようなプロセスを経てこのような解が発生するのか；

である．これらに答えるため，自明解まわりにおける解の分岐に焦点をあて，カオスの挙動をもつ解が発生する分岐構造の解明に取り組んできた．現在までに，自明解からの分岐の枝を追跡することで，Hopf-Pitchfork 分岐が非自明な平衡点において発生することが分かった．さらに Dumortier et al. [2] による結果を応用すれば，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形と呼ばれる 3 次元常微分方程式系（本稿第 3 章を参照）

$$\begin{cases} \dot{r} = (\operatorname{Re}\lambda + \operatorname{Re}J_1 r^2 + \operatorname{Re}J_2 x^2)r + \varphi_1(r, x), \\ \dot{x} = (\nu_0 + K_1|w|^2 + K_2 x^2)x + \varphi_2(r, x), \\ \dot{\theta} = \omega + \varphi_3(r, x) \end{cases}$$

がヘテロクリニックサイクルをもちうるということが分かる．すなわち，ある条件のもとで積分項をもつ空間 1 次元反応拡散系は，それに対応する複雑なダイナミクスをもちうる ([1]).

解析方法の中心になるのは，中心多様体理論，標準形理論である．第 2 章では解をフーリエ展開し，フーリエ係数による無限次元力学系を得る．そして中心多様体縮約を行い，有限次元の力学系へと落とし込む．さらに第 3 章では，自明解から分岐する非自明な解に着目し，標準形理論を適用することで，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形を導出する．第 4 章では，[2] の結果を適用することで，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形に，一つの平衡点と一つの周期軌道とを結ぶヘテロクリニックサイクルが存在しうることを紹介し，第 5 章で本稿のまとめを行う．

## 2 中心多様体縮約

この章では，中心多様体理論により縮約方程式を導出する．すなわち，無限次元力学系を，ある有限次元の力学系へと落とし込む．そのための準備として，hidden symmetry を利用する． $(u(t, x), v(t, x)) \in X$  を (1.1) の解としたとき，

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & x \in [0, L], \\ u(t, 2L - x) & x \in [L, 2L]. \end{cases}, \quad \tilde{v}(t, x) = \begin{cases} v(t, x) & x \in [0, L], \\ v(t, 2L - x) & x \in [L, 2L] \end{cases} \quad (2.1)$$

は  $(0, 2L)$  へと拡張された，以下のシステムの解であることがわかる：

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + f(u, v) + \frac{s}{2L} \int_0^{2L} u(t, x) dx, & x \in (0, 2L), \quad t > 0, \\ v_t = D_2 v_{xx} + g(u, v), & x \in (0, 2L), \quad t > 0, \\ u(t, x) = u(t, x + 2L), \quad u_x(t, x) = u_x(t, x + 2L), & t > 0, \\ v(t, x) = v(t, x + 2L), \quad v_x(t, x) = v_x(t, x + 2L), & t > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

したがって、システム (2.2) を相空間：

$$X_{per} := \{(u, v) \in H_{per}^2(0, 2L) \times H_{per}^2(0, 2L); (u(x), v(x)) = (u(2L - x), v(2L - x))\} \quad (2.3)$$

の下で考える．逆に、(2.2) の解を  $(0, L)$  に制限したものは (1.1) の解となるから、本稿では (2.2)-(2.3) を扱うこととする．このとき、解を以下のようにフーリエ展開できる：

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(t) e^{imkx}, \quad v(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m(t) e^{imkx}.$$

これらをシステム (2.2) に代入し、三角関数の直交性を利用することで、以下のフーリエ係数による無限次元力学系を得る：

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{v}_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m \\ G_m \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

ただし

$$M_0 = \begin{pmatrix} f_u + s & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} f_u - D_1 j^2 k^2 & f_v \\ g_u & g_v - D_2 j^2 k^2 \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

であり、

$$\begin{aligned} F_m &= \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}} \left( \frac{f_{uu}}{2} u_{m_1} u_{m_2} + f_{uv} u_{m_1} v_{m_2} + \frac{f_{vv}}{2} v_{m_1} v_{m_2} \right) \\ &+ \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}}} \left( \frac{f_{uuu}}{6} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} + \frac{f_{uuv}}{2} u_{m_1} u_{m_2} v_{m_3} + \frac{f_{uvv}}{2} u_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} + \frac{f_{vvv}}{6} v_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} \right) + \cdots, \\ G_m &= \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}} \left( \frac{g_{uu}}{2} u_{m_1} u_{m_2} + g_{uv} u_{m_1} v_{m_2} + \frac{g_{vv}}{2} v_{m_1} v_{m_2} \right) \\ &+ \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}}} \left( \frac{g_{uuu}}{6} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} + \frac{g_{uuv}}{2} u_{m_1} u_{m_2} v_{m_3} + \frac{g_{uvv}}{2} u_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} + \frac{g_{vvv}}{6} v_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} \right) + \cdots. \end{aligned}$$

ここで、 $f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0)$  などとしている．我々は無限次元力学系 (2.4) を以下のフーリエ空間  $X_F$  において考える：

$$X_F := \left\{ \{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{Z}}; (u_m, v_m) = (u_{-m}, v_{-m}), \|\{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{Z}}\|_{X_F}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (1+m^2)^2 |(u_m, v_m)|^2 < \infty \right\}.$$

これは、射影  $\mathcal{P}(u, v) : X_{per} \rightarrow X_F$ ;

$$\mathcal{P}(u, v) = \left\{ \frac{1}{2L} \int_0^{2L} (u(t, x), v(t, x)) e^{-imkx} dx \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

によって  $X_{per}$  と同値である．ここで、 $u(t, x) \in \mathbb{R}, v(t, x) \in \mathbb{R}$  と対称性 (2.1) から、 $(u_m, v_m) = (u_{-m}, v_{-m}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  であることに注意されたい．よって、 $m \geq 0$  において力学系 (2.4) を考えればよい．

以下、分岐パラメータを  $s, D_2, k$  とし、中立安定曲線と呼ばれるものを定義する：

**Definition 1.** 中立安定曲線とは,  $\text{Det } M_m = 0$  を満たす分岐パラメータ  $(D_2, k)$  により定まる曲線のことである. すなわち, 中立安定曲線は各  $m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$D_2(k; m) = \frac{g_v D_1 m^2 k^2 - \delta}{m^2 k^2 (D_1 m^2 k^2 - f_u)}$$

で定まる. ここで,  $\delta := f_u g_v - f_v g_u$  としている.

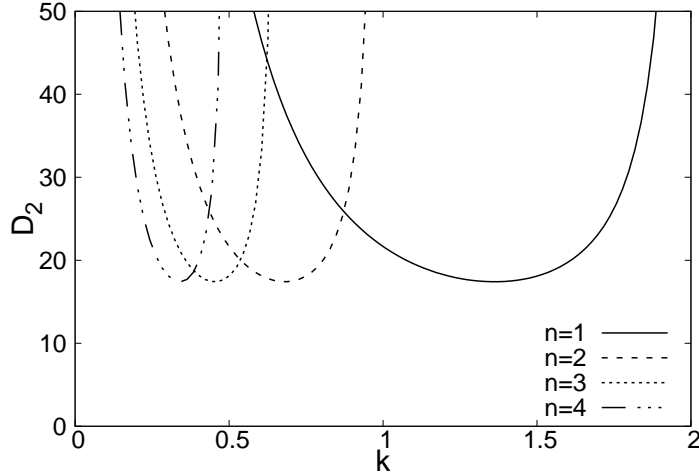


図 2.1  $f_u = 1, f_v = -10, g_u = 2, g_v = -5, D_1 = 1/4$  のときの中立安定曲線. 右から  $n = 1, 2, 3, 4$  に対応する.

本講演では,  $0 : 1 : 2$  モードの線型化行列が同時に  $0$  固有値をもつ状況を考え, これを満たすように  $(s, D_2, k) = (s_*, D_2^*, k_*)$  をとる. このパラメータの組  $(s_*, D_2^*, k_*)$  のことを 3 重臨界点と呼ぶこととする. このとき力学系 (2.4) に対して

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = T_0^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} = T_m^{-1} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}, \quad (m = 1, 2)$$

による変換を施す. ここで

$$T_0 = \begin{pmatrix} -g_v & f_v g_u \\ g_u & g_u \end{pmatrix}, \quad T_m = \begin{pmatrix} -g_v + D_2^* m^2 (k^*)^2 & f_u - D_1 m^2 (k^*)^2 \\ g_u & g_u \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2)$$

である. すると以下の無限次元力学系を得る:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \frac{1}{g_v^2 + f_v g_u} \left( -\tilde{F}_0 + \frac{f_v}{g_v} \tilde{G}_0 \right), \\ \dot{\beta}_0 = (\text{Tr } M_0) \beta_0 + \frac{1}{g_v^2 + f_v g_u} \left( \tilde{F}_0 + \frac{g_v}{g_u} \tilde{G}_0 \right), \\ \dot{\alpha}_1 = \frac{1}{\det T_1} \left\{ g_u \tilde{F}_1 + (D_1 (k^{1,2})^2 - f_u) \tilde{G}_1 \right\}, \\ \dot{\beta}_1 = (\text{Tr } M_1) \beta_1 + \frac{1}{\det T_1} \left\{ -g_u \tilde{F}_1 + (D_2^{1,2} (k^{1,2})^2 - g_v) \tilde{G}_1 \right\}, \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{1}{\det T_2} \left\{ g_u \tilde{F}_2 + (4D_1 (k^{1,2})^2 - f_u) \tilde{G}_2 \right\}, \\ \dot{\beta}_2 = (\text{Tr } M_2) \beta_2 + \frac{1}{\det T_2} \left\{ -g_u \tilde{F}_2 + (4D_2^{1,2} (k^{1,2})^2 - g_v) \tilde{G}_2 \right\}, \\ \begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{v}_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m \\ G_m \end{pmatrix} \quad (|m| \geq 3). \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで  $\tilde{F}_m, \tilde{G}_m$  は  $\alpha_m, \beta_m$  に関する高次項を表す. 上の力学系 (2.5) に中心多様体定理 ([4, 5]) を適用することで, 3次元に縮約された常微分方程式系 (縮約方程式) を得る.

**Theorem 1.** 3重臨界点  $(s, D_2, k) = (s_*, D_2^*, k_*)$  近傍における中心多様体上の力学系は, 以下の常微分方程式 (縮約方程式) が定める力学系と局所位相同値である:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \mu_0 \alpha_0 + A_1 \alpha_0^2 + A_2 \alpha_1^2 + A_3 \alpha_2^2 + (a_1 \alpha_0^2 + a_2 \alpha_1^2 + a_3 \alpha_2^2) \alpha_0 + a_4 \alpha_1^2 \alpha_2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4), \\ \dot{\alpha}_1 = \mu_1 \alpha_1 + B_1 \alpha_0 \alpha_1 + B_2 \alpha_1 \alpha_2 + (b_1 \alpha_0^2 + b_2 \alpha_1^2 + b_3 \alpha_2^2) \alpha_1 + b_4 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4), \\ \dot{\alpha}_2 = \mu_2 \alpha_2 + E_1 \alpha_0 \alpha_2 + E_2 \alpha_1^2 + (e_1 \alpha_0^2 + e_2 \alpha_1^2 + e_3 \alpha_2^2) \alpha_2 + e_4 \alpha_0 \alpha_1^2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4). \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで, 係数  $A_j, B_j, E_j, a_j, b_j, e_j \in \mathbb{R}$  はシステム (1.1) の定数  $D_1$  と反応項  $f(u, v), g(u, v)$  から定まる定数であり,  $\mu_j$  ( $|\mu_j| \ll 1$ ) は  $s, D_2, k$  に依存する分岐パラメータである.

上で得られた縮約方程式は, 変換  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\alpha_0, -\alpha_1, \alpha_2)$  の下で不変である. 以下, 得られた縮約方程式を3次項までで打ち切った力学系:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \mu_0 \alpha_0 + A_1 \alpha_0^2 + A_2 \alpha_1^2 + A_3 \alpha_2^2 + (a_1 \alpha_0^2 + a_2 \alpha_1^2 + a_3 \alpha_2^2) \alpha_0 + a_4 \alpha_1^2 \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 = \mu_1 \alpha_1 + B_1 \alpha_0 \alpha_1 + B_2 \alpha_1 \alpha_2 + (b_1 \alpha_0^2 + b_2 \alpha_1^2 + b_3 \alpha_2^2) \alpha_1 + b_4 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_2 = \mu_2 \alpha_2 + E_1 \alpha_0 \alpha_2 + E_2 \alpha_1^2 + (e_1 \alpha_0^2 + e_2 \alpha_1^2 + e_3 \alpha_2^2) \alpha_2 + e_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

を扱うこととし,  $A_j \neq 0, B_j \neq 0, E_j \neq 0, a_j \neq 0, b_j \neq 0, e_j \neq 0$  とする.

### 3 Hopf-Pitchfork 分岐

この節では, 非自明な平衡点  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$  からの解の分岐を調べる. 次の補題を得ることができる:

**Lemma 1.**  $A_3 E_1 < 0$  が成り立っていると仮定する.  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  を

$$2(\rho^2 e_3 + a_1) + A_1 - \rho^2 A_3 = 0$$

を満たすようにとる. この  $\rho$  に対して

$$\begin{aligned} \alpha_0^* &= \frac{\rho^2 A_3 - A_1}{2(a_1 + \rho^2 e_3)}, \quad \alpha_2^* = \rho \alpha_0^*, \\ \mu_0 &= \mu_0^* := -\alpha_0^* \{A_1 + a_1 \alpha_0^* + \rho^2 (A_3 + a_3 \alpha_0^*)\}, \\ \mu_1 &= \mu_1^* := -\alpha_0^* \{B_1 + \rho B_2 + (b_1 + \rho b_4 + \rho^2 b_3) \alpha_0^*\}, \\ \mu_2 &= \mu_2^* := -\alpha_0^* \{E_1 + (e_1 + \rho^2 e_3) \alpha_0^*\} \end{aligned}$$

とすると,  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$  における線型化行列は単純0固有値とペアの純虚数固有値を同時にもつ.

平衡点  $(\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$  を原点に平行移動したのち, Hopf 分岐の標準形変換と近恒等変換 ([5]) を施すことで, Hopf-Pitchfork 分岐の標準形を得る:

$$\begin{cases} \dot{z} = (\lambda + J_1 |z|^2 + J_2 x^2) z + O(|(z, \bar{z}, x)|^4), \\ \dot{x} = (\nu + K_1 |z|^2 + K_2 x^2) x + O(|(z, \bar{z}, x)|^4). \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  であり,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  は新たな分岐パラメータ,  $J_j, K_j \in \mathbb{C}$  である.  $z = r(t)e^{\theta(t)}$  と変換し, さらに適切なスケールリングを施すことで,

$$\begin{cases} \dot{r} = (\nu_1 + r^2 + bx^2)r + \varphi_1(r, x), \\ \dot{x} = (\nu_2 + cr^2 + dx^2)x + \varphi_2(r, x), \\ \dot{\theta} = \omega + \varphi_3(r, x) \end{cases} \quad (3.2)$$

と書き換えることができる. ここで,  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$  は新たな分岐パラメータ,  $d = \pm 1$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_j(r, x)$  は  $r, x$  に関する 4 次以上の高次項を表す. 力学系 (3.2) は変換  $(r, x) \mapsto (-r, -x)$  の下で不変であることに注意されたい. これは元の縮約方程式 (2.6) がもつ対称性を保つような平衡点まわりでの分岐を考えていることによる恩恵である.

## 4 標準形解析

この章では, 力学系 (3.2) がヘテロクリニックサイクルを持ちうることを議論する. もし, 力学系 (3.2) に  $\theta$  方向への回転対称性がある場合には, ドーム型の不変曲面が存在することが知られている ([3]). しかし, 今回の場合にはそのような対称性 (つまり  $S^1$ -symmetry) は引き継がれない. このような状況では, Dumortier et al. [2] により紹介されている手法が有効である. 実はこの対称性が崩れた場合には,  $S^1$ -symmetric な状況で形成される不変曲面が崩壊し, その結果コネクティングオービットが作られる.

以下,  $\varphi_n$  はすべて  $C^\infty$  級と仮定し, Dumortier et al. [2] による手法を適用する. 力学系 (3.2) について, blow-up を行う. 十分小さな  $\varepsilon > 0$  によって

$$\mu_1 = \varepsilon^2 \bar{\mu}, \quad \mu_2 = \varepsilon^2, \quad r = \varepsilon \bar{r}, \quad x = \varepsilon \bar{x}$$

の変換と, 時間のリスケールリング  $d\tau = \varepsilon^2 dt$  を行うことで

$$\begin{cases} r' = r(\mu + r^2 + bx^2) + \varphi_1(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^3, \\ x' = x(1 + cr^2 + dx^2) + \varphi_2(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^3, \\ \theta' = \omega/\varepsilon^2 + \varphi_3(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

を得る. ここで, “-” は省略し, ‘ は  $\tau$  による微分を表す. 回転部分と  $O(\varepsilon)$  の項を無視すると, 以下の平面上における力学系を得る:

$$\begin{cases} r' = r(\mu + r^2 + bx^2), \\ x' = x(1 + cr^2 + dx^2). \end{cases} \quad (4.2)$$

以下, 次の仮定のもとで力学系 (4.2) を考える:

$$b > 0, \quad c < 0, \quad d = -1, \quad d - bc > 0, \quad \mu < 0. \quad (4.3)$$

このとき平衡点は

$$O := (0, 0), \quad p^1 := (0, 1), \quad p^2 := \left( \sqrt{\frac{c\mu - 1}{-1 - bc}}, \sqrt{\frac{b + \mu}{-1 - bc}} \right), \quad p^3 := (\sqrt{-\mu}, 0)$$

で与えられる. これらそれぞれに対応する (4.1) の平衡点を  $p_{\mu, \varepsilon}^1, p_{\mu, \varepsilon}^2, p_{\mu, \varepsilon}^3$  とおき,  $p_{\mu, \varepsilon}^3$  によって作られる閉軌道を  $C_{\mu, \varepsilon}$  と書く. 力学系 (4.2) は  $\mu = \mu^* := (b + 1)/(c - 1)$  においてハミルトニアン  $H(r, x)$  をもつ:

$$H(r, x) = r^\alpha x^\beta \{-\mu + (r^2 + \gamma x^2)\}.$$

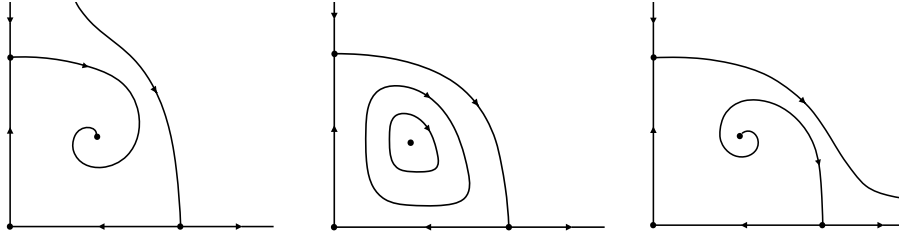


図 4.1 (4.2) の相図の模式図. 左から  $\mu < \mu^*$ ,  $\mu = \mu^*$ ,  $\mu > \mu^*$  に対応する.

ここで  $\alpha = 2(1-c)/(-1-bc)$ ,  $\beta = 2(1+b)/(-1-bc)$ ,  $\gamma = (1+b)/(1-c)$ ,  $-1-bc > 0$  である.

先に述べたように, 図.4.1 (中央) で得られた 3 つの平衡点を繋ぐヘテロクリニック軌道は,  $\varphi_j(r, x)$  が  $S^1$ -symmetric を保つようなものであれば, 3次元空間においてもドーム型の不変曲面として存続することが知られている ([3]). ところが generic にはそのような対称性は保存されない. 実際, 縮約方程式 (2.7) から Hopf-Pitchfork 分岐の標準形 (3.1) に変換する過程で, 4 次以上の高次項を無視している. 有限次で考える限り  $\theta$  方向の回転対称性は保存されるが, 無限次における項においては, もはやそのような対称性は残っていない. このような無限次における対称性を破壊するような影響を考慮にいと, 実は平衡点  $O$  と  $p^1$  における 1次元不変多様体が分離しうる. それにより不変ドームが崩壊し, そこにコネクティングオービットが生成されうる. ここでは, 平衡点  $p_{\mu, \varepsilon}^3$  によって形成される周期軌道  $C_{\mu, \varepsilon}$  と原点を繋ぎ合わせるヘテロクリニックサイクルの存在を議論する.

さて, いくつかの記号の定義を行う.

- $\Sigma$ :  $(r, x, \theta)$  空間における 2次元断面のことであり,  $\Sigma := \{(r, x, \theta) | x = \sqrt{(b+\mu)/(-1-bc)}\}$ ;
- $C^u$ :  $\Sigma \cap W^u(p_{\mu, \varepsilon}^1)$  で表される単純閉曲線;
- $C^s$ :  $\Sigma \cap W^s(C_{\mu, \varepsilon})$  で表される単純閉曲線;
- $q$ :  $W^u(O)$  と断面  $\Sigma$  との二つ目の交点.

**Definition 2.** *Exceptional set*  $\mathcal{E}$  を以下で定義する:

$$\mathcal{E} := \{(\mu, \varepsilon) \neq (0, 0) | \text{平衡点 } (0, 0) \text{ と } (1, 0) \text{ の } 1 \text{次元不変多様体が交差しない.}\}$$

**Definition 3.** 力学系 (4.1) またはそれに対応するパラメーターの点が *forward trapping* にあるとは,  $C^u$  が  $C^s$  の内部にあるときのことをいう (図.4.1 (左)). さらに,  $C^u$  と  $C^s$  で囲まれた平面  $\Sigma$  上の環状の領域と, 2次元不変多様体  $W^s(C_{\mu, \varepsilon})$  と  $W^u(p_{\mu, \varepsilon}^1)$  の一部を *forward trapping region* と呼ぶ. 力学系 (4.1) またはそれに対応するパラメーターが *backward trapping* にあるとは,  $C^s$  が  $C^u$  の内部にあるときのことをいう (図.4.1 (右)). さらに *backward trapping region* も上と同様に定義する.

いま, 条件 (4.3) に加えて  $b+c < 0$ ,  $\mu^* := (c-1)/(b+1) < 0$  とする. さらに, パラメータ  $(\mu, \varepsilon)$  を exceptional set  $\mathcal{E}$  と交差しないように動かせるとする. このとき,  $O$  の 1次元不安定多様体と  $p_{\mu, \varepsilon}^1$  の 1次元安定多様体とが互いに交差することなく *forward trapping* から *backward trapping* へと入れ替わる, すなわち,  $C^u$  と  $C^s$  の位置が入れ替わることがわかる (図.4.2). さらに,  $\Sigma$  上の点  $q$  の位置に着目すれば, 点  $q$  と  $C^s$  が断面  $\Sigma$  上でぶつかるようなパラメータがとれる. つまり,  $O$  における 1次元不安定多様体と  $p_{\mu, \varepsilon}^3$  における 1次元安定多様体とが交差する. したがって, ある  $(\mu_*, \varepsilon_*)$  が存在して  $(\mu, \varepsilon) = (\mu_*, \varepsilon_*)$  のときに  $O$  を出発して, 元のドーム型の不変曲面の近くを辿り, 再び  $O$  に戻ってくるような軌道が存在する (図.4.3). た



だし、これらのことが成り立つためには、力学系 (3.2) について [1] で示されるいくつかの仮定を満たすことが必要となる。

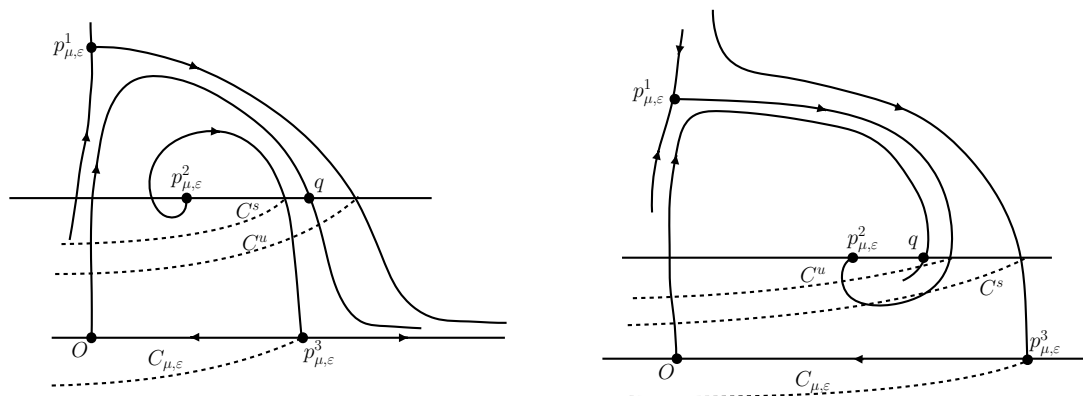


図 4.2 1次元不変多様体分離するときの (4.1) の流れの模式図. 左図は  $\mu < \mu^*$  (backward trapping), 右図は  $\mu > \mu^*$  (forward trapping) にそれぞれ対応する.

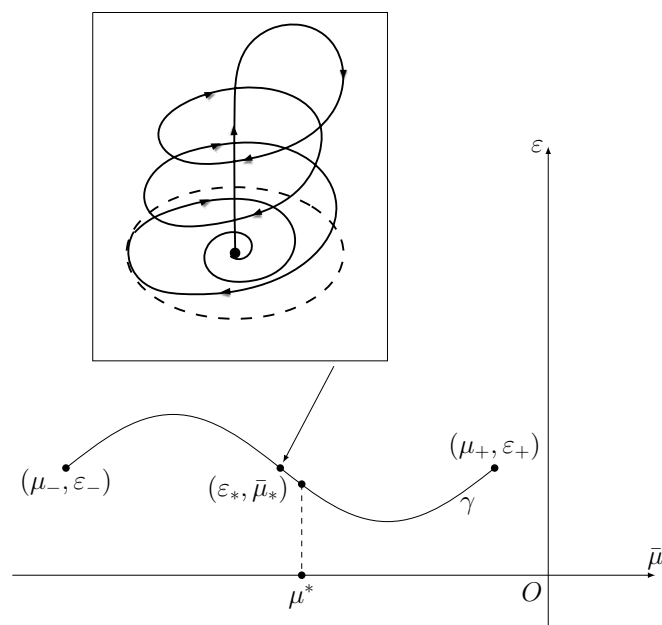


図 4.3  $\mu - \varepsilon$  空間におけるヘテロクリニックサイクルの分岐の模式図.  $(\mu_-, \varepsilon_-)$  は backward trapping,  $(\mu_+, \varepsilon_+)$  は forward trapping に対応している. 与えられた  $\mu_- < \mu^* < \mu_+ < 0$  に対して exceptional set  $\mathcal{E}$  と交わらないようなパス  $\gamma$  を  $(\mu_-, \varepsilon_-)$  と  $(\mu_+, \varepsilon_+)$  をつなぐようにとれるなら, (4.1) がヘテロクリニックサイクルをもつようなパラメータ  $(\mu_*, \varepsilon_*) \in \gamma$  が存在する.

## 5 まとめ

$\{(r, x, \theta) \mid (r, x) = (r^*, x^*)\}$ ,  $r^*, x^* \neq 0$  を力学系 (4.1) のリミットサイクルとする. このリミットサイクルは Hopf 分岐を起こす. すなわち, Hopf-Pitchfork 分岐は滑らかなトーラスを作る. このトーラスはヘテロクリニックサイクル分岐曲線から離れたところでは存続することが予想され, この分岐曲線にパラメータを近づけるにつれて, トーラスが崩壊する. したがって, 反応拡散系 (1.1) は滑らかなトーラス上での 2 重周期に対応する解をもつだけでなく, 上の考察で得られたヘテロクリニックサイクル (もしくはその近傍を通るような軌道) に対応するカオス的挙動を示す解をもちうる. 実際, ヘテロクリニックサイクルやそのまわりに馬蹄が存在するための条件を満たすようなパラメータや反応項を与えて得られた数値結果が, 冒頭の図 1.1 である. また, 中心多様体縮約により導出される縮約方程式は, 元々の偏微分方程式と境界条件に関する対称性や, それに由来する固有関数の対称性により形が決定される. したがって, 本稿で扱った方程式のみならず, 同様の対称性を満たす偏微分方程式を考えると, 同じ縮約方程式を導出することが可能である. 本稿ではシステム (1.1) を空間 1 次元において考察したが, 講演時には, 時間が許せば, ヘテロクリニックサイクルのまわりに馬蹄が形成されることや, 空間 2 次元におけるシステム (1.1) の解析結果も紹介したい.

## References

- [1] S. KOBAYASHI AND T. O. SAKAMOTO, *Hopf Bifurcation and Hopf-Pitchfork Bifurcation in an Integro-Differential Reaction-Diffusion System*, submitted.
- [2] F. DUMORTIER F, S. IBÁÑEZ, H. KOKUBU AND C. SIMÓ, *About the unfolding of a Hopf-zero singularity*, Discrete and Continuous Dynamical Systems series A, **33** (2013), 4435–4471.
- [3] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields”, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] M. HARAGUS AND G. IOOSS, “Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamics Systems”, Springer, 2010.
- [5] YU A. KUZNETSOV, “Elements of Applied Bifurcation Theory, 3<sup>rd</sup> edition”, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] E. N. LORENTZ, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atom. Sci., **20** (1963) 130–141.
- [7] Y. NISHIURA AND D. UHEYAMA, *Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model*, Physica D **150** (2001) 137–162.
- [8] T. OGAWA, *Degenerate Hopf instability in oscillatory reaction-diffusion equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplements, **Special vol.** (2007), 784–793.
- [9] T. OGAWA AND T. OKUDA, *Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance*, Networks and Heterogeneous Media, **7** (4) (2012) 893–926.
- [10] T. OGAWA AND T. O. SAKAMOTO, *Chaotic dynamics in an integro-differential reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance*, Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future (2016, Nov.) 531–562.
- [11] W. TUCKER, *A Rigorous ODE Solver and Smale’s 14th Problem*, Found. Comput. Math. **2** (2002) 53–117.