

ソリトンとネットワーク

○田中悠太 (Yuta Tanaka)* , 城戸真弥† , 渡邊靖之* , 丸野健一‡ , 笈三郎§

1 イントロダクション

2次元浅水波を記述する代表的な数理モデルとして Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

が知られている。特に $\sigma^2 = -1$ の時は KP I 方程式, $\sigma^2 = 1$ の時は KP II 方程式と呼ばれている。KP II 方程式はソリトン解を持つことが知られており, その解は Wronskian で表示することができる。最近, KP II 方程式の Wronskian 解のソリトン相互作用は組み合わせ論的手法を用いることでより深く解析できることがわかってきた [1, 2, 3, 4].

本稿では KP II 方程式の拡張の一つとして知られている DKP(coupled KP) 方程式 [5, 6]

$$\begin{cases} (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 24(v^+v^-)_{xx} \\ 2v_t^\pm + 3uv_x^\pm + v_{xxx}^\pm \mp 3(v_{xy}^\pm + v^\pm \int^x u_y dx) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

のソリトン相互作用を扱う。DKP 方程式 (2) は $v^+ = v^- = 0$ とした時に KP II 方程式 (1) に一致するので, この方程式は KP II 方程式の全ての解を厳密解として含んでいる。Isojima-Willox-Satsuma は広田の方法を用いて DKP 方程式のソリトン解を求め, spider-web 解と呼ばれる蜘蛛の巣状パターンのソリトン相互作用の持つ解を発見した [7]. この spider-web 解の発見の後, Biondini-Kodama は KP II 方程式も spider-web 解を持つことを発見し [8], これがきっかけとなり 2次元ソリトンの相互作用の研究が活発化することとなった。Chakravarty-Kodama は KP II 方程式のソリトン解の Wronskian 表示に対して Cauchy-Binet の公式を適用し, KP II 方程式のソリトン解の分類に成功した [1]. その後, Kodama らによって KP II 方程式のソリトン解の分類は chord 図, J-diagram, ネットワークなどを用いることで完全置換と対応することが示された [3]. Kodama-Maruno は DKP 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示に対して石川・若山の Pfaffian の和公式を適用し, DKP ソリトン相互作用の詳細な解析を行ったが, DKP ソリトン相互作用は KP ソリトン相互作用に比べて非常に複雑であり, 数学的道具の不足も相まってソリトン解の分類にまでは至っていない [9]. そのため, DKP ソリトン相互作用の分類を行うためにはまず数学的道具を整備する必要がある。本研究の目標は, Kodama-Maruno による DKP 方程式のソリトン相互作用の研究をさらに前進させ, DKP 方程式のソリトン解の分類を行い, ソリトン相互作用の詳細を理解することである。本稿では KP II 方程式のソリトン相互作用と置換, chord 図, J-diagram, ネットワークについて解説した後, DKP 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示に対してネットワークを構成する方法を提案する。

*早稲田大学大学院数学応用数理専攻

†早稲田大学基幹理工学部応用数理学科

‡早稲田大学理工学術院

§立教大学理学部

2 KP II 方程式の Wronskian 解とネットワーク

KP II 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

は従属変数変換 $u(x, y, t) = 2(\log \tau(x, y, t))_{xx}$ によって双線形方程式

$$(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (3)$$

に変形され, この双線形方程式 (3) は Wronskian 解

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3}$$

を持つ. ただし D_x, D_y, D_t は広田の D 演算子

$$D_x^l D_y^m D_t^n f(x, y, t) \cdot g(x, y, t) = \frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial y^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x+x', y+y', t+t') g(x-x', y-y', t-t') \Big|_{\substack{x'=0 \\ y'=0 \\ t'=0}}$$

である. 特に分散関係式 (4) を満たす f_i として

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y + k_j^3 t \quad (k_1 < k_2 < \cdots < k_M, \quad N < M)$$

を考えると τ 関数は

$$\tau = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1} e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1} e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right|$$

$$=: |\hat{A}E|$$

と表され, これは KP II 方程式 (1) のソリトン解になる. このように表されたソリトン解の相互作用を分類するために \hat{A} 行列に次の 2 条件を課す:

- \hat{A} 行列の $N \times N$ 小行列式が全て非負である. (totally non-negative, TNN)
- \hat{A} 行列を行基本変形で階段行列にした時, 全ての行のピボット以外の成分および全ての列に非零の成分が存在する. (reduced row echelon form, RREF)

ここで 1 つ目の条件は τ 関数が零点を持たない, つまりもとの従属変数 u が特異点を持つような非物理的な解でないことに対応し, 2 つ目の条件はゲージ変換を含めて本質的に指数関数が M 個全て残ることに対応している. \hat{A} 行列に行基本変形を施してもゲージ変換により u が変化しないことに注意し, 階段行列に変形した後の成分の残り方に注目すると, 例えば \hat{A} 行列のサイズが 2×4 の場合の相互作用のパターンは全部で表 1 にあるような 7 タイプだということがわかる.

次に, 先程分類したソリトン相互作用のそれぞれのタイプが置換と対応していることをネットワークを通して説明する. そのためにまず J-diagram を導入する. J-diagram とは Young 図形の中に次の J-property と呼ばれる条件に従って白丸を配置したものである [10]:

- 白丸が入った箱があった場合、その箱より上の箱全て、もしくはその箱より左の箱全てに白丸が入っている。
- 白丸が入った箱のみの行および列が存在しない。

例えば、図1はJ-diagramであるが、図2や図3はJ-diagramになっていない。

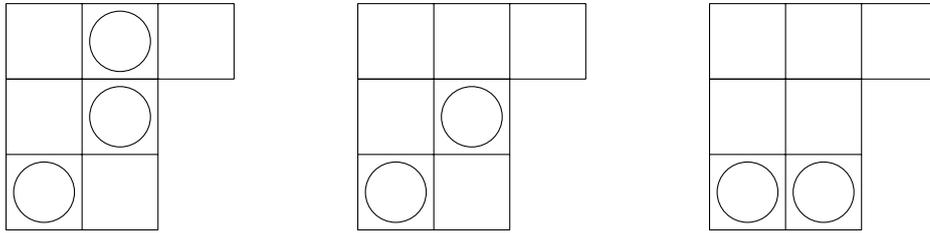


図1: J-diagram の例 図2: J-diagram でない例 図3: J-diagram でない例

J-diagram は完全置換と 1 対 1 に対応する。ここで完全置換とは M 次完全置換 π で $i \neq \pi(i)$ ($i = 1, \dots, M$) を満たすものである。J-diagram から対応する完全置換の構成方法は以下の手順に従う:

1. 図4のルールに従って空き箱、白丸の入った箱を全て置き換える。
2. Young 図形の右、下枠に一番右上から数字を 1 から順に M まで並べる。
3. 図4のルールで数字が移ると考えて Young 図形の左、上枠に対応する数字を並べる。
4. Young 図形の右、下枠の数字 i に対して向かい合う左、上枠の数字を $\pi(i)$ としたものが完全置換 π である。



図4: J-diagram の書き換え

例えば、図1のJ-diagram に手順1~3を適用したのが図5であり、手順4で得られる完全置換は

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

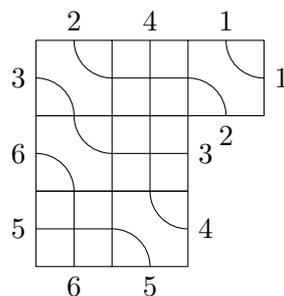


図5: 図1と完全置換との対応

さらに, J-diagram はネットワークとも対応する. J-diagram からネットワークの構成方法は以下の通りである:

1. 空き箱を y_i に, 白丸の入った箱を s_i に置き換える. このとき, y, s の添字は
 - 一番右上の箱の添字は 1
 - 右または上に箱があればその添字 +1
 で決定され, 各パラメータ p_j は全て正とする.
2. 一番下の行から, 同じ行の中では一番右の箱から順に図 6 のようにネットワークに置き換え, 右につなげていく.

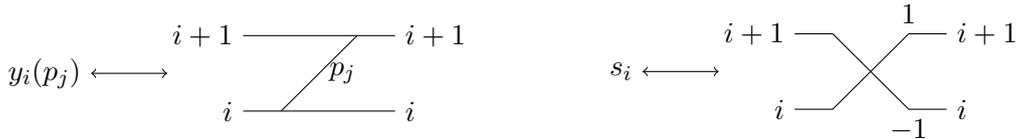


図 6: y_i, s_i とネットワークの対応

例えば, 図 1 の J-diagram に上の手順を施したのが図 7, 図 8 である.

$y_3(p_7)$	s_2	$y_1(p_5)$
$y_4(p_4)$	s_3	
s_5	$y_4(p_1)$	

図 7: 図 1 とネットワークとの対応

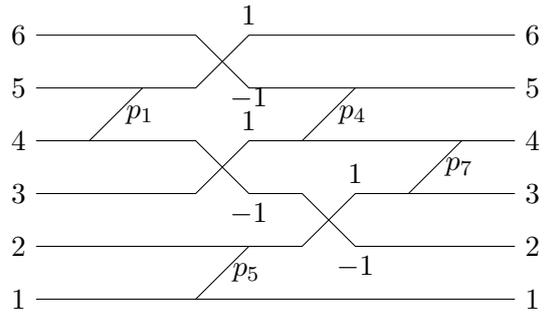


図 8: 図 1 に対応するネットワーク

このようにして得られたネットワークは行列として解釈することができる. 具体的には, ネットワーク上に振られている数字をその経路の重み (何も書かれていない場合は重み 1) と考え, ネットワークの左の番号 i から右の番号 j への経路の重みを $M \times M$ 行列 A の第 $M - i + 1, M - j + 1$ 成分とする. さらにここで得られた行列 A に対して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \mapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{MN} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$$

という操作を施すことで $N \times M$ 行列 \hat{A} が得られ, これは TNN かつ RREF なので確かに KP II 方程式のソリトングラフと対応する. ただし, N は J-diagram に対応する完全置換で $l < \pi(l)$ を満たす元 l の個数とする. 図 8 のネットワークの場合は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 p_7 & p_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} p_5 p_7 & p_7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

3 DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian 解

DKP 方程式

$$\begin{cases} (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 24(v^+v^-)_{xx} \\ 2v_t^\pm + 3uv_x^\pm + v_{xxx}^\pm \mp 3(v_{xy}^\pm + v^\pm \int^x u_y dx) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

は従属変数変換 $u = 2(\log \tau_n)_{xx}$, $v^\pm = \tau_{n\pm 1}/\tau_n$ によって双線形方程式

$$\begin{cases} (-4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\tau_n \cdot \tau_n = 24\tau_{n-1}\tau_{n+1} \\ (2D_t + D_x^3 \mp 3D_x D_y)\tau_{n\pm 1} \cdot \tau_n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

に変形され、この双線形方程式 (5) は Wronski 型 Pfaffian 解

$$\begin{aligned} \tau_n &= \text{Pf}[\mathcal{Q}_n] = \sum_{\Omega} \sigma(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) Q_{i_1, j_1} Q_{i_2, j_2} \cdots Q_{i_n, j_n}, \\ \mathcal{Q}_n &= (Q_{i, j})_{1 \leq i, j \leq 2n}, \\ \frac{\partial}{\partial t_k} Q_{i, j} &= Q_{i+k, j} + Q_{i, j+k} \quad (t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t) \end{aligned} \quad (6)$$

を持つ [6]. ただし, \mathcal{Q}_n は $2n$ 次反対称行列, $\Omega = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq 2n, i_k < j_k, k = 1, \dots, n\}$ であり,

$$\sigma(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_n & j_n \end{pmatrix}$$

である。ここで, \mathcal{Q}_n を M 次反対称パラメータ行列 B ($M > 2n$) を用いて,

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top$$

$$\mathcal{E}_n = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_M \\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & \cdots & E_M^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^{(2n-1)} & E_2^{(2n-1)} & \cdots & E_M^{(2n-1)} \end{pmatrix}, E_i^{(j)} = k_i^j \exp(k_i x + k_i^2 y + k_i^3 t)$$

と選ぶとこれは分散関係式 (6) を満たす。この表示によって得られる τ 関数は石川・若山の Pfaffian の和公式を用いて以下のように展開される [9]:

$$\tau_n = \text{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top] = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n} \leq M} \text{Pf}[B_{i_1, \dots, i_{2n}}^{i_1, \dots, i_{2n}}] \det[(\mathcal{E}_n)_{i_1, \dots, i_{2n}}]. \quad (7)$$

ただし, $B_{i_1, \dots, i_{2n}}^{i_1, \dots, i_{2n}}$ は行列 B の i_1, \dots, i_{2n} 行および i_1, \dots, i_{2n} 列を抜き出した小行列を表し, $(\mathcal{E}_n)_{i_1, \dots, i_{2n}}$ は \mathcal{E}_n の i_1, \dots, i_{2n} 列を抜き出した小行列を表す。このように展開した時, 全ての $\text{Pf}[B_{i_1, \dots, i_{2n}}^{i_1, \dots, i_{2n}}]$ が非負であればこれはソリトン解を与える。

4 DKP 方程式のソリトン解とネットワーク

式 (7) の τ 関数のパラメータ行列 B が与えられた時, そこから対応するネットワークが得られることを簡単に説明する. そのためにまず次のような $M \times M$ 行列を導入する:

$$J_M^{(2l)}(q_1, \dots, q_l) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & q_1 & & \\ -q_1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & q_l \\ \hline & & -q_l & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right)_{M \times M}$$

このような $J_M^{(2l)}(q_1, \dots, q_l)$ を M 次反対称行列の標準形と呼ぶことにする. さらに

$$\phi_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & b \\ & & c & d \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は } (M-i, M-i) \text{ 成分}),$$

$$x_i(p) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \text{---} & i+1 \\ & \diagdown p & \\ i & \text{---} & i \end{array},$$

$$y_i(p) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \text{---} & i+1 \\ & \diagup p & \\ i & \text{---} & i \end{array},$$

$$s_i = \phi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \text{---} & i+1 \\ & \diagdown 1 & \\ i & \text{---} & i \\ & \diagup -1 & \end{array}$$

なる $x_i(p), y_i(p), s_i$ の積で表される行列 A で

$$B = A J_M^{(2l)}(q_1, \dots, q_l) A^\top$$

の形にすることを反対称行列 B の標準化と呼ぶことにする. この時, 行列 A はその構成方法からネットワークで表すことができる. 例えば,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は $A_1 = y_1(3)y_3(2)s_2$ を用いて $B_1 = A_1 J_4^{(2)}(1) A_1^\top$ と分解されるので, この B_1 行列に図 9 のネットワークを対応させることができる. これは KP II 方程式の Wronskian 解で現れたネットワークに他ならず,

$$\tau_2 = \text{Pf}[\mathcal{E}_2 B_1 \mathcal{E}_2^\top]$$

ととるとこれは KP II 方程式の解にもなっている.

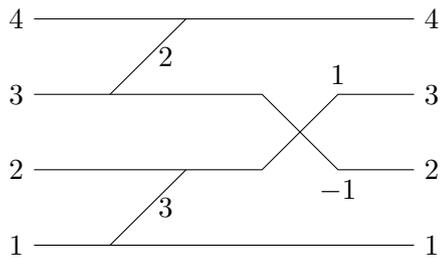


図 9: A_1 に対応するネットワーク

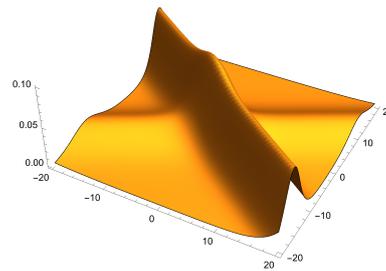


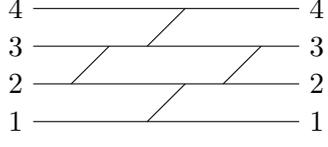
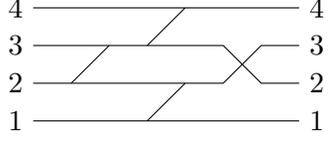
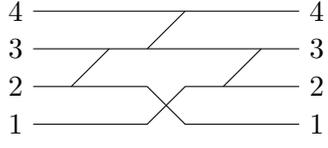
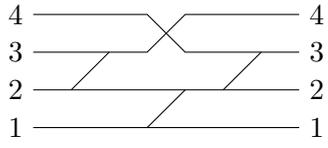
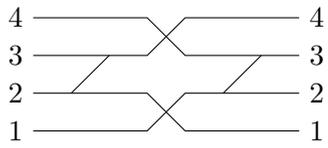
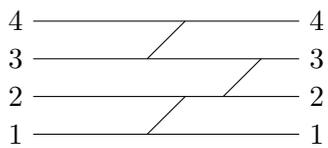
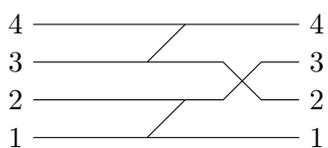
図 10: B_1 に対応するソリトンのグラフ

また, この手順を逆に辿ることで KP II 方程式の Wronskian 解の解析で現れたネットワークからその解の Wronski 型 Pfaffian 表示が得られる.

5 まとめ

KP II 方程式のソリトン解の分類は Wronskian 表示に対するネットワークなどを用いて詳細な解析がなされていたが, 今回, ネットワークを用いて DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian で表されるソリトン解の解析を行うことを試みた. その結果, DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian で表されるソリトン解とネットワークを関連付けることに成功した. また, 今回の手法を用いることによって KP II 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示が簡単に得られ, それを用いることによってソリトン解に対応するネットワークがより統一的に得られるようになった. しかしながら, 本研究の目的である DKP 方程式のソリトン解の分類を行い, ソリトン相互作用の詳細を理解するには必要な数学的道具がまだ整っておらず, 今後, 必要な手法を整備していく必要がある. 本研究で提案した手法をさらに発展させることによって DKP 方程式のソリトン相互作用についてより詳しい解析を行いたい.

表 1: \hat{A} 行列のサイズが 2×4 の時の解の分類

\hat{A} 行列	ネットワーク	ソリトンのグラフ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}, (ad - bc < 0)$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}, (ad - bc = 0)$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$		

参考文献

- [1] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, *Classification of the line-soliton solutions of KP II*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 275209.
- [2] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, *Soliton Solutions of the KP Equation and Application to Shallow Water Waves*, Stud. Appl. Math. **123**, 83-151.
- [3] Y. Kodama, L. K. Williams, 2011, *KP solitons, total positivity, and cluster algebras*, PNAS. **108**, 8684-8989.
- [4] Y. Kodama, 2017, *KP Solitons and the Grassmannians – Combinatorics and Geometry of Two-Dimensional Wave Patterns* (Springer, Singapore).
- [5] M. Jimbo, T. Miwa, 1983, *Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **19**, 943-1001.
- [6] R. Hirota, Y. Ohta, 1990, *Hierarchies of Coupled Soliton Equations.I*, J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 798-809.
- [7] S. Isojima, R. Willox and J. Satsuma, 2003, *Spider-web solutions of the coupled KP equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 9533-9552.
- [8] G. Biondini, Y. Kodama, 2003, *On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 10519-10536.
- [9] Y. Kodama, K. Maruno, 2006, *N-soliton solutions to the DKP equation and Weyl group actions*. J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 4063-4086.
- [10] A. Postnikov, 2006, *Total Positivity, Grassmannians, and Networks* arXiv: math.CO/0609764