Building set に伴うトーリック Fano 多様体

須山 雄介 * † (Yusuke Suyama)
大阪市立大学 大学院理学研究科

1 トーリック多様体と扇

n 次元**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，**代数的トーラス** $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．代数的トーラスの作用は明示しないことが多いが，トーリック多様体というと作用も込めて考えており，代数多様体としては同じものでも，作用が異なれば異なるトーリック多様体と考える．

トーリック多様体は，扇とよばれる多面錐の有限集合と 1 対 1 に対応する．$\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトル $v_1, \ldots, v_r$ で張られる多面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ で，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる部分空間も含まないものをいう．$\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，$\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ であって，次を満たすものをいう．

(1) $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
(2) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

定理 1.1 (トーリック幾何の基本定理)**.** n 次元トーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇は 1 対 1 に対応する．

本稿では扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する方法のみ解説する．まず，各有理強凸多面錐 $\sigma \in \Delta$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する．$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \mid$ すべての $v \in \sigma$ に対し $\langle u, v\rangle \geq 0\}$ とおくと，$\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ は和に関し可換モノイドになり，モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域になる．したがって $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ はアフィン代数多様体になるので，これを U_σ とおく．次にこれらを貼り合わせる．τ が σ の面ならば，包含写像 $\tau \to \sigma$ から自然に定まる射 $U_\tau = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] = U_\sigma$ は開埋め込みになる．これにより U_τ を U_σ の開部分集合と同一視し，U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である．

トーリック多様体の多くの代数幾何的性質が扇の言葉に翻訳できる．$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ は，$\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma = \mathbb{R}^n$ を満たすとき**完備**であるといい，各 $\sigma \in \Delta$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底の一部で張られるとき**非特異**であるという．

定理 1.2. $\mathbb{R}^n$ の扇 Δ に対し，$X(\Delta)$ が完備（resp. 非特異）であることは，Δ が完備（resp. 非特異）であることと同値である．

トーリック多様体 $X(\Delta)$ が射影的かどうかも扇 Δ の側で判定できるが簡単ではない．本講演で扱うトーリック多様体はすべて非特異で射影的である．

2 Building set に伴うトーリック多様体

空でない有限集合 S 上の **building set** とは，S の空でない部分集合からなる有限集合 B で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in B$ かつ $I \cap J \neq \emptyset$ ならば，$I \cup J \in B$ である．

*d15san0w03@st.osaka-cu.ac.jp
†本研究は，科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものである．

(2) 任意の $i \in S$ に対し，$\{i\} \in B$ である．

B の包含関係に関する極大元全体を $B_{\max}$ で表し，$B_{\max}$ の元を B**-component** とよぶ．$B_{\max} = \{S\}$ のとき B は**連結**であるという．S の空でない部分集合 C に対し，$B|_C = \{I \in B \mid I \subset C\}$ は C 上の building set になる．任意の building set B に対し，$B = \bigsqcup_{C \in B_{\max}} B|_C$ が成り立つ．特に，任意の building set はいくつかの連結な building set の非交和である．

定義 2.1. Building set B の **nested set** とは，$B \setminus B_{\max}$ の部分集合 N で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in N$ ならば，$I \subset J, J \subset I, I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．

(2) 任意の $k \geq 2$ と，任意の pairwise disjoint な $I_1, \ldots, I_k \in N$ に対し，$I_1 \cup \cdots \cup I_k \notin B$ が成り立つ．

B の nested set 全体を $\mathcal{N}(B)$ で表す．

Building set B からトーリック多様体 $X(\Delta(B))$ を構成する．まず，B が連結な場合を考える．$S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし，$e_{n+1} = -e_1 - \cdots - e_n$ とおく．$I \subset S$ に対し $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ とおき，$N \in \mathcal{N}(B)$ に対し $\mathbb{R}_{\geq 0} N = \sum_{I \in N} \mathbb{R}_{\geq 0} e_I$ とおくと，$\Delta(B) = \{\mathbb{R}_{\geq 0} N \mid N \in \mathcal{N}(B)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の扇になる．したがって n 次元トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ が対応する．B が連結でない場合，$X(\Delta(B)) = \prod_{C \in B_{\max}} X(\Delta(B|_C))$ と定める．

命題 2.2 ([8, Corollary 5.2 and Theorem 6.1])**.** $X(\Delta(B))$ は非特異射影的トーリック多様体になる．

例 2.3. $S = \{1,2,3\}, B = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ とする．このとき，$\mathcal{N}(B)$ は

$$\{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{2,3\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{1\},\{3\}\}, \{\{2\},\{2,3\}\}, \{\{3\},\{2,3\}\}\}$$

となる．したがって図 1 のような扇が対応し，伴うトーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は $\mathbb{P}^2$ の 1 点ブローアップである．

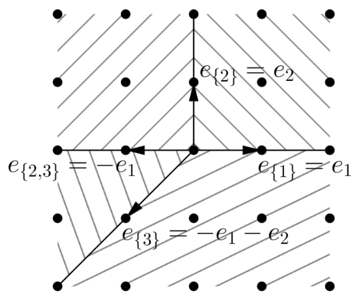

図 1: 扇 $\Delta(B)$.

注意 2.4. $X(\Delta(B))$ は単なるトーリック多様体の具体例というだけのものではない．初出および関連する話題について述べる．

(1) V を有限次元 $\mathbb{C}$ 線形空間とする．De Concini–Procesi [1] は，V^* の subspace arrangement $\mathcal{G}$ である条件を満たすものに対し，非特異射影代数多様体 $\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ と $\mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{P}(G^{\perp})$ 上同型な全射 $p \colon \overline{Y}_{\mathcal{G}} \to \mathbb{P}(V)$ で，$p^{-1}(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{P}(G^{\perp}))$ が $\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ の単純正規交差因子になるようなものを構成した．条件を満たす $\mathcal{G}$ を **building set** とよび，$\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ を **wonderful model** とよぶ．特別な場合に $\mathcal{G}$ を抽象化したものが B であり，$\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ をトーリックの言葉で書き直したものが $X(\Delta(B))$ である．

(2) Building set B に対し **nestohedron** とよばれる多面体 P_B を定めることができ，その normal fan として扇 $\Delta(B)$ を構成することもできる．有限単純グラフから building set を定めることができ，これに対応する nestohedron を **graph associahedron** とよぶ．Graph associahedron は **associahedron**, **cyclohedron**, **stellahedron**, **permutohedron** とよばれる特別な多面体の無限系列を含んでいる（それぞれ道グラフ，閉路グラフ，星グラフ，完全グラフに対応する）．したがって，building set に伴うトーリック多様体のクラスは，これらの多面体に伴うトーリック多様体をすべて含んでいる．

(3) Building set から構成されるトーリック多様体はモジュライ理論にも現れる．たとえば，Losev–Manin [2] は点付き安定有理曲線のモジュライ空間が permutohedron に伴うトーリック多様体として実現できることを示している．

3 トーリック（弱）Fano 多様体

反標準因子が豊富である代数多様体を **Fano 多様体**というが，因子の豊富性を弱めた条件として，ネフかつ巨大というものがある．非特異複素射影多様体は，反標準因子がネフかつ巨大であるとき**弱 Fano** であるという．トーリック Fano 多様体は各次元に同型を除いて有限個しかないことが知られており，与えられた次元のトーリック Fano 多様体をすべて求めるアルゴリズムも知られている [3].

次元	1	2	3	4	5	6	7	8
トーリック Fano 多様体の数	1	5	18	124	866	7622	72256	749892

トーリック弱 Fano 多様体も各次元に有限個しか存在しないが，トーリック弱 Fano 多様体は，トーリック Fano 多様体よりもはるかに多く，これらすべてを調べることは難しい．実際，トーリック弱 Fano 多様体の扇からは，1 次元多面錐の原始ベクトルの凸包をとることで反射的多面体が定まるが，反射的多面体の個数は次元が上がるにつれ急激に増えることが知られている（3 次元では 4,319 個，4 次元では 473,800,776 個あり，5 次元以上では不明である）．

トーリック多様体が（弱）Fano かどうかを判定するには，反標準因子との交点数を，トーラス不変曲線に対してのみ調べれば十分である．$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ の $n-1$ 次元有理強凸多面錐 τ に対応するトーラス不変曲線を $V(\tau)$ で表す.

命題 3.1. $X(\Delta)$ を n 次元非特異射影的トーリック多様体とする．

(1) $X(\Delta)$ が Fano $\Leftrightarrow$ Δ の任意の $n-1$ 次元多面錐 τ に対し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) > 0$ ([4, Lemma 2.20]).
(2) $X(\Delta)$ が弱 Fano $\Leftrightarrow$ Δ の任意の $n-1$ 次元多面錐 τ に対し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) \geq 0$ ([5, Proposition 6.17]).

そして，反標準因子とトーラス不変曲線の交点数は，扇の言葉で容易に記述できる（たとえば [4] 参照）．これにより，$X(\Delta)$ が（弱）Fano かどうかを完全に扇の側で判定できる．

命題 3.2. $X(\Delta)$ を n 次元非特異完備トーリック多様体とし，$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{n-1}$ を Δ の $n-1$ 次元有理強凸多面錐（v_i は原始ベクトル）とする．v, v' を異なる原始ベクトルで，$\tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v, \tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v'$ がともに Δ の n 次元多面錐になるものとする．このとき，整数 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ で $v + v' + a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} = 0$ を満たすものが一意的に存在し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) = 2 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ となる．

4 主結果

定理 4.1 ([6]). B を building set とすると，次は同値である．

(1) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は Fano.
(2) B-component C と，$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B|_C$ に対し，$I_1 \cup I_2 = C$ かつ $I_1 \cap I_2 \in B|_C$ が成り立つ．

2 次元以下のトーリック Fano 多様体はすべて building set から得られる．3 次元トーリック Fano 多様体 18 種類のうち，building set に伴うものは 14 種類である．

定理 4.2 ([7]). B を building set とすると，次は同値である．

(1) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は弱 Fano.

(2) B-component C と，$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B|_C$ に対し，次の少なくとも一方が成り立つ．

(i) $I_1 \cap I_2 \in B|_C$.

(ii) $I_1 \cup I_2 = C$ かつ $|(B|_{I_1 \cap I_2})_{\max}| \leq 2$.

特に，building set に伴う 3 次元以下のトーリック多様体はすべて弱 Fano である．4 次元以上では，building set に伴うトーリック多様体で弱 Fano でないものが存在する．

本稿では定理 4.1 の証明の方針のみを解説する（定理 4.2 も同じような方針で証明されるが，より複雑である）．任意の building set は連結な building set の非交和であり，連結な building set の非交和はトーリック多様体の直積に対応する．トーリック多様体の直積が Fano であるための必要十分条件は，もとのトーリック多様体がすべて Fano であることであるから，S 上の連結な building set B に対し，次が同値であることを示せば十分である．

(1′) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は Fano.

(2′) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B$ に対し，$I_1 \cup I_2 = S$ かつ $I_1 \cap I_2 \in B$ が成り立つ．

難しいのは (1′) ⇒ (2′) の部分なので，こちらだけを解説する．証明の鍵となるのは次の補題である．

補題 4.3. B を S 上の連結な building set とし，$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たすとする．このとき，

$$\begin{gathered} J_1, J_2 \in B, j_1 \in J_1 \setminus J_2, j_2 \in J_2 \setminus J_1, \\ N \in \mathcal{N}(B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}, N' \in \mathcal{N}(B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max} \end{gathered}$$

で，$J_1 \cap J_2 \neq \emptyset, J_1 \cup J_2 = I_1 \cup I_2$ かつ

$$\{J_k\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max}$$

が各 $k = 1, 2$ に対し B の nested set になるようなものが存在する．

補題 4.3 の証明は非常に技巧的であるが，与えられた $I_1, I_2 \in B$ から，条件を満たす $J_1, J_2, j_1, j_2, N, N'$ を具体的に見つけるアルゴリズムになっている．

$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1, I_1 \cup I_2 \subsetneq S$ を満たすとする．補題 4.3 の $J_1, J_2, j_1, j_2, N, N'$ をとる．$M \in \mathcal{N}(B)$ で

$$\{J_k, J_1 \cup J_2\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max} \cup M$$

が各 $k = 1, 2$ に対し極大な nested set になるようなものが存在するので，

$$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}(\{J_1 \cup J_2\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max} \cup M)$$

とおくと，

$$e_{J_1} + e_{J_2} - \sum_{C \in (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}} e_C - e_{J_1 \cup J_2} = 0$$

だから，命題 3.2 より

$$(-K_{X(\Delta(B))}.V(\tau)) = 2 - |(B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}| - 1 \leq 2 - 1 - 1 = 0$$

となり，命題 3.1 (1) より $X(\Delta(B))$ が Fano でないことがわかる．

$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cup I_2 = S$ かつ $I_1 \cap I_2 \notin B$ である場合も，補題 4.3 の主張を少し修正した補題を考えることで，$X(\Delta(B))$ が Fano でないことを示すことができる．

参考文献

[1] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), 459–494.

[2] A. Losev and Yu. Manin, *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*, Michigan Math. J. 48 (2000), 443–472.

[3] M. Øbro, *An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes*, arXiv:0704.0049.

[4] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[5] H. Sato, *Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties*, Tohoku Math. J. 52 (2000), no. 3, 383–413.

[6] Y. Suyama, *Toric Fano varieties associated to building sets*, Kyoto J. Math., to appear; arXiv:1611.01636.

[7] Y. Suyama, *Toric weak Fano varieties associated to building sets*, Osaka J. Math., to appear; arXiv:1705.07304.

[8] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure Appl. Math. Q. 2 (2006), no. 3, 655–671.