

Spiking Neural Network にみられる線形分離性

北海道大学大学院理学院数学専攻 博士課程1年 藤堂真登 Todo Masato

1 導入

脳の情報表現に関する問題は、脳科学における最も重要な問題の一つである。特に人間の知的な振る舞いを可能にする脳部位である大脳皮質の情報表現を理解することは、知能とは何かを考える上で、一つの大きな手掛かりとなるだろう。本研究では同期発火するセルアセンブリを情報表現の手法だと仮定する。その上で、情報伝達の物理的拘束条件が、線形不等式から得られることを指摘し、そのことを数値シミュレーションにより確認する。

2 線形不等式による連想記憶モデルの解法

b を m 次元実ベクトル、 A を $m \times n$ 型実行列とし、次の線形不等式を考える。

$$Aw \leq b \quad (1)$$

(1) 式を満たす解 $w \in \mathbb{R}^n$ は Fourier-Motzkin 法を用いることで求められる。次の定理は、Fourier-Motzkin 法を用いることで証明できる [1]。

定理 1. (1) が解 $w \in \mathbb{R}^n$ をもたない $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}_+^m$ s.t. $A^T y = 0, b^T y < 0$

次に連想記憶モデルと呼ばれるニューラルネットワークを考える。2層の階層型ニューラルネットワークを考え、入力層の状態を $x \in \{0, 1\}^M$ 、出力層の状態を $y \in \{0, 1\}^N$ とする。パターン対 $(x^d, y^d)_{d=1}^D$ に対して、次のようなモデルを考える。

定義 1. (2値相互想起型連想記憶モデル) 次のような $N \times M$ 型実行列 W が存在するとき、2値相互想起型連想記憶モデルという。

$$\forall d \quad y^d = H(Wx^d + \theta) \quad (2)$$

ここで、 $\theta \in \mathbb{R}^N$ はバイアス項と呼ばれ、 $H : \mathbb{R}^M \rightarrow \{0, 1\}^N$ は、各成分が次のようなステップ関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ からなるとする。

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (3)$$

以上の連想記憶モデルの解法として、行列 W を相関行列と呼ばれる行列にとる方法や、一般化逆行列にとる方法が知られている。相関行列は、Hebb 則と呼ばれるニューラルネットワークの学習則から得られる。一般化逆行列は、一般の線形方程式を解くために使われる。一方で (2) 式のような2値の連想記憶モデルには、次のよ

うに線形不等式を解くのが自然であると考える. 行列 W の i 行目の行ベクトルを w_i とし, y_i^d, θ_i をそれぞれ y^d, θ の第 i 成分とする. 任意の $d \in \{1, \dots, D\}, i \in \{1, \dots, N\}$ に対し, 次が成り立つとき (2) 式を満たす.

$$\begin{cases} y_i^d = 1 \Rightarrow w_i \cdot x^d + \theta_i \geq 0 \\ y_i^d = 0 \Rightarrow w_i \cdot x^d + \theta_i < 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad w_i \cdot x^d + \theta_i \leq -\epsilon \end{cases} \quad (4)$$

(4) 式はさらに, $\forall i, \forall \epsilon > 0$ に対し,

$$X_i w_i \leq \Theta_i \quad (5)$$

と表せる. ここで X_i は, d 行目の行ベクトルとして $-(2y_i^d - 1)x^d$ をとる $D \times M$ 行列で, Θ_i は d 成分として $(2y_i^d - 1)\theta_i + (y_i - 1)\epsilon$ をとる D 次元ベクトルである. 定理 1 を使うことで, 次のように連想記憶モデルの可解性を判定することができる.

例題 1. $M = 2, N = 1$ の場合において, 次のパターン対 $\{x^d, y^d\}_{d=1}^4$ に対する 2 値相互想起型連想記憶モデルは存在しない. パターン対 $x^1 = (1, 0), y^1 = 1, x^2 = (0, 1), y^2 = 1, x^3 = (1, 1), y^3 = 0, x^4 = (0, 0), y^4 = 0$. 実際, (x^4, y^4) から $\theta < 0$ である. $z = (1, 1, 1)^T$ とすると, $X^T z = 0, \Theta^T \cdot z = \theta - \epsilon < 0$. ゆえに定理 1 から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し (5) 式を満たす解 w_1 が存在しないことがわかる.

このようなパターン対の識別を XOR 問題といい, 例題 1 は XOR パターンが線形分離不可能ということを示したことになる [2]. $w_1 = (w_{11}, w_{12})$ とおくと, このことは (w_{11}, w_{12}) 平面上で図 1 のように現れる. ここで $\theta < 0$ とし, 領域 H_1, \dots, H_7 は, 超平面 $h_{10} = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta = 0\}, h_{01} = \{w_1 | w_1 \cdot x^2 + \theta = 0\}, h_{11} = \{w_1 | w_1 \cdot x^3 + \theta = 0\}$ で分割される領域を $h_{10}^u = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta \geq 0\}, h_{10}^d = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta < 0\}$ などとおき, $H_1 = h_{10}^u \cap h_{01}^u \cap h_{11}^u, H_2 = h_{10}^u \cap h_{01}^d \cap h_{11}^u, H_3 = h_{10}^d \cap h_{01}^u \cap h_{11}^u, H_4 = h_{10}^d \cap h_{01}^d \cap h_{11}^u, H_5 = h_{10}^u \cap h_{01}^d \cap h_{11}^d, H_6 = h_{10}^d \cap h_{01}^u \cap h_{11}^d, H_7 = h_{10}^d \cap h_{01}^d \cap h_{11}^d$ と表される領域である. 明らかに $h_{10}^u \cap h_{01}^u \cap h_{11}^d$ が存在しない.

3 Spiking Neuron Network の概要

神経細胞 (Neuron) は, 脳の情報表現を担う最小単位のユニットであると考えられている. 神経細胞の生理学的な振る舞いを常微分方程式で表現したのが, Spiking Neuron である. 一般的に次のように表せる.

$$\frac{dv}{dt} = f(v, u), \quad \frac{du}{dt} = g(v, u) \quad (6)$$

ここで, 時間 $t \in [0, \infty)$, 膜電位 $v \in \mathbb{R}^1$, チャネル変数 $u \in \mathbb{R}^n$ とし, f, g をベクトル値関数とする. $n=1$ のモデルとして Fitzhugh-Nagumo モデル, $n=3$ では Hodgkin-Huxley モデルが有名である. 以上のような Spiking Neuron は, 理論的には力学系の分岐理論によって確立している [3]. その理論では, 神経細胞の閾値がセパトリクスによって定義される. 特に excitable state にある場合閾値は, サドルの安定多様体に対応する.

次に, Spiking Neuron に外部刺激を加えた状況を考える. 外部刺激とは, 他の神経細胞からのスパイクや, 環境ノイズのことである. 特に生体内の大脳皮質の神経細胞は興奮性と抑制性があり, それらはポアソン過程でスパイクを発することが知られている. そこで興奮性と抑制性の外部刺激をそれぞれ $I_E(t), I_G(t)$ で表すと,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f(v, u) + I_E(t) + I_G(t), & \frac{du}{dt} &= g(v, u) \\ I_E(t) &= a_E \sum_j \alpha(t - t_E^j), & I_G(t) &= a_G \sum_j \alpha(t - t_G^j) \end{aligned} \quad (7)$$

とかける. ここで a_E, a_G をそれぞれ興奮性と抑制性の背景活動の大きさとし, $\alpha(t)$ は, スパイクに対する応答関数とする. 興奮性と抑制性のスパイク列 $\{t_E^j\}, \{t_G^j\}$ が平均発火率 λ_E, λ_G のポアソン過程で生成されるとする. このようなノイズの影響で膜電位は確率的に変動する. Spiking Neuron として Integrate-and-Fire モデル, 応答関数としてデルタ関数を考え, a が十分小さいと仮定すると, Fokker-Planck 方程式を使って膜電位の確率密度関数の時間発展を解析することができる [4,5].

4 線形分離性によるセルアセンブリの物理的拘束条件

大脳皮質の情報表現の手段の一つとして, セルアセンブリ仮説というものがある. 複数の神経細胞の発火状態の組み合わせ, セルアセンブリが情報の単位となっているという仮説である. セルアセンブリにもいくつかの様式が考えられるが, ここでは synfire chain を考える [6]. synfire chain とは, 数ミリ秒の間隔内で同期したスパイクを発するセルアセンブリを一つの単位とし, そのようなセルアセンブリからの同期したスパイク入力が必要なセルアセンブリを形成するという仮説である.

本質的には, セルアセンブリ $x \in \{0, 1\}^M$ から入力を受け取る後細胞 y が発火するか, しないかということなので, 同期したスパイクからの外部刺激を $I_{syn}(t)$ で表し, 後細胞の Spiking Neuron を次のように表す.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f(v, u) + I_E(t) + I_G(t) + I_{syn}(t), & \frac{du}{dt} &= g(v, u) \\ I_E(t) &= a_E \sum_j \alpha(t - t_E^j), & I_G(t) &= a_G \sum_j \alpha(t - t_G^j) \\ I_{syn} &= \sum_{k=1}^M x_k w_k \alpha(t - T) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, w_k は k 番目の神経細胞からのスパイクの大きさとする. 時刻 T で x からの入力を受け取るとする. ここで $\alpha(t) = h(t) \exp(-\frac{t}{\tau})$ とする. $h: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ は (3) 式のステップ関数である.

以降は数値シミュレーションの概要である. Spiking neuron として Izhkevich モデルを使い, excitability state をとるパラメータを選択する. セルアセンブリ x を確率的に生成し, 後細胞が区間 $[T, T + \delta t]$ で発火する確率 $p(y = 1|x)$ を, サンプリングにより求めた. $M = 2$ とし, (w_1, w_2) 上の $p(y = 1|x)$ について次のように分類したのが, 図 2 である. ある点 (w_1, w_2) を決めて, 例題 1 のパターン x^d ($d = 1, 2, 3$) それぞれに対し $p(y = 1|x^d)$ が 0.5 以上か未満かで分類し, 色分けした. 例えば赤い色は, $p(y = 1|x^1) < 0.5 \wedge p(y = 1|x^2) < 0.5 \wedge p(y = 1|x^3) < 0.5$ となる点 (w_1, w_2) である. このシミュレーション結果から, (5) 式の線形不等式の可解性がセルアセンブリの情報伝達の物理的な拘束条件を与えることが予想される. 高次元の線形不等式に対しては, 線形計画法のソルバーを使うことで現実的な時間で可解性を判定できる.

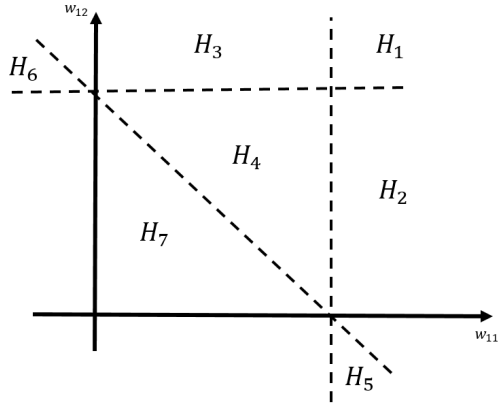


図1 (w_{11}, w_{12}) 平面上的線形分離領域

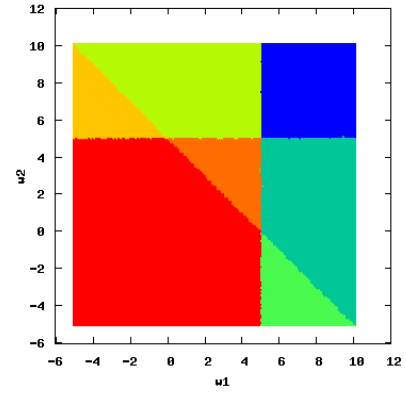


図2 (w_1, w_2) に対して, Spiking Neuron の発火確率 $p(y = 1|x)$ を 0.5 を基準に分類した図.

参考文献

- [1] 室田一雄, 杉原正顯 『線形代数 (東京大学工学教程 基礎系 数学)』, 丸善出版 (2013)
- [2] M. ミンスキー, S. パパート 『パーセプトロン』 齊藤正男 訳, 東京大学出版会 (1971)
- [3] Izhikevich M, "Dynamical systems in neuroscience", The MIT Press (2010)
- [4] 甘利俊一, 深井朋樹 『脳の計算論 (シリーズ脳科学 1)』 東京大学出版会 (2009)
- [5] Wulfram Gerstner, Werner M. Kistler, Richard Naud and Liam Paninski, "Neuronal Dynamics", Cambridge University Press (2014)
- [6] M. Abeles, "Corticonics", Cambridge University Press (1991)