Finite Euclidean graphs and related combinatorial problems

佐竹 翔平 (Shohei Satake)*

概　要

Terras らによって導入された Euclid 距離空間の有限類似では, 興味深いことに, Euclidean グラフとよばれるネットワークとしてよい性質 (Ramanujan グラフ) をもつグラフが登場し, その固有値は Kloosterman 和で表されるなどの整数論的な対象との関連も見られる. 一方で, Erdős の距離問題などの Euclid 距離空間での組合せ論的問題を有限類似の空間上で考える研究も近年盛んに行われている.

本稿では, 上記の流れを概説した後, Euclid 距離空間の s-距離集合の問題を有限類似の空間上で考え, Euclidean グラフの固有値の情報を用いたグラフ理論的手法から, その最大サイズの上界を与える. また, 有限上半平面などの他の有限空間への拡張や, 一般化された Euclidean グラフの固有値に関する観察についても触れる.

1. 序

n 次元 Euclid 距離空間は, 実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に, Euclid 距離とよばれる距離関数 $e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ を導入することで定義される. Euclid 距離空間は数学の様々な分野で登場するもっとも基本的な距離空間であり, 組合せ論や離散幾何学においても, 後述する Erdős の距離問題や s-距離集合などの様々な問題が研究されてきた.

その一方で, Euclid 距離空間の有限類似に関しての研究も近年注目されつつある. Terras ら [13] によって提案された有限類似は, 位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ に, 距離に対応する関数として $d(x,y) = (x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$ を導入するというものである. ここで, $d(x,y)$ は平行移動に関する不変性は持つが, 三角不等式などの距離関数のその他の性質は持ちえないため, 空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ は距離空間ではない. しかし Euclidean グラフという応用上重要なクラス (Ramanujan グラフ) に属するグラフが登場し, また上記で述べたような Euclid 空間で研究された問題をこの空間で考えることで, 加法的数論との関連が見られるなどの点で極めて興味深い.

本稿では, 上記の流れを概説したのち, Euclid 距離空間の s-距離集合の問題を空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ 上で考える. 本稿の構成は以下の通りである. まず第 2 節と第 3 節で Euclidean グラフと Ramanujan グラフについて述べ, 第 4 節で Erdős の距離問題と関連する結果を述べる. 第 5 節では s-距離集合の問題と著者の主結果について述べ, 最後に第 6 節では他の有限空間への結果の拡張や一般化された Euclidean グラフの固有値に関する観察を述べる.

2. Euclidean グラフ

本節では, Euclidean グラフに関する諸性質と Ramanujan グラフについて述べる. 以下では $q = p^r$ は奇素数べきとする.

* 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学 大学院システム情報学研究科 情報科学専攻
e-mail: 155x601x@stu.kobe-u.ac.jp

定義 2.1 ([13])**.** $a \in \mathbb{F}_q$ とする．このとき，頂点集合に $\mathbb{F}_q^n$ をもち，異なる 2 頂点 x, y が $d(x, y) = a$ のとき隣接すると定義されるグラフ $E_q(n, a)$ を *Euclidean* グラフとよぶ.

グラフ $E_q(n, a)$ に関しては次の事実が知られている.

命題 2.2 ([13])**.** $E_q(n, a)$ に対して，以下が成り立つ.

(1) $n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ の場合を除き，$E_q(n, a)$ は $q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})$-正則である．すなわち各頂点の次数 (接続する辺の数) は $q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})$ である．$n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ のとき，$E_q(n, a)$ の各頂点の次数は 0 であり，$E_q(n, q)$ は辺を持たない.

(2) $n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ の場合を除き，$E_q(n, a)$ は連結，すなわち任意の 2 頂点を結ぶ道が存在する.

さらに，$E_q(n, a)$ の隣接行列の固有値については，次の結果が知られている．ただし，グラフ G の隣接行列 $A(G) = (a_{u,v})_{u,v \in V(G)}$ は，u と v が隣接するとき $a_{u,v} = 1$，そうでないとき $a_{u,v} = 0$ として定義される．本稿では，$A(G)$ の固有値を単に G の固有値とよぶことにする.

命題 2.3 ([13])**.** $E_q(n, a)$ の固有値は，以下の表示を持つ:

$$\lambda_b = G_1^n \cdot K(\varepsilon^n \mid a, d(b/2, 0)).$$

ここで，$\varepsilon(t)$ は $\mathbb{F}_q$ の平方剰余指標とする．すなわち，

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t\text{ が平方元;} \\ -1 & t\text{ が非平方元;} \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

また，G_1 は Gauss 和，すなわち

$$G_1 = \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \varepsilon(t) \exp\Big(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(t)\Big)$$

であり，$\mathbb{F}_q$ の乗法指標 χ に対し，$K(\chi \mid c, d)$ は Kloosterman 和，すなわち

$$K(\chi \mid c, d) = \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t) \exp\Big(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(-ct - dt^{-1})\Big)$$

である.

3. Ramanujan グラフ

次に Ramanujan グラフについて述べる．以下では, G は k-正則 n 頂点グラフとする．まずグラフ G の拡大定数 $h(G)$ を次で定義する:

$$h(G) = \min_{1 \leq |S| \leq \frac{n}{2}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

ただし, S は G の頂点部分集合を動くとし, $\partial S = \{u \notin S \mid \exists v \in S,\ u \text{ は } v \text{ と隣接する}\}$ とおく．$h(G)$ は G における局所的な辺の「結ばれ具合」を測る量である．また, $\mathrm{diam}(G)$ で G の直径 (G 内の最長道の長さ) とおく．上の 2 つの量は G の固有値によって, 次のように評価できる．

事実 3.1 (e.g. [10])**.** k-正則グラフ G が連結であるとき, 次が成り立つ．

$$\mathrm{diam}(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log \frac{k}{\lambda(G)}} + 1,$$

$$h(G) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda(G)}{k}\right).$$

ただし, $\lambda(G) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } |\lambda| \neq k \text{ なる } G \text{ の固有値}\}$ とおく．

さて, k-正則グラフ G をネットワークとみなしたとき, 断線に対するある程度の強さを保証するためには $h(G)$ の値は大きい方が望ましい．また, 各 2 点が通信する場合, 経由する地点は少ない方がよいため, $\mathrm{diam}(G)$ は小さい方が望ましい．よって, これら 2 つの要請を満たすには, $\lambda(G)$ を小さくすればよい．だが, Alon-Boppana による次の漸近的な下界が知られている．

定理 3.2 ([12])**.** 固定された k に対し, $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $|V(G_i)| \to \infty$ $(i \to \infty)$ なる任意の k-正則グラフの無限列とする．このとき,

$$\liminf_{i \to \infty} \lambda(G_i) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

この下界から, Lubotzky-Phillips-Sarnak [12] によって, Ramanujan グラフが定義された．

定義 3.3 ([12])**.** k-正則グラフ G が $\lambda(G) \leq 2\sqrt{k-1}$ を満たすとき, G を *Ramanujan グラフ*とよぶ．

さて, 前節で Euclidean グラフを紹介したが, 命題 2.2, 2.3 と Kloosterman 和に関する Weil の結果から次が言える．

定理 3.4 ([13])**.** $|\lambda(E_q(n,a))| \leq 2q^{\frac{n-1}{2}}$．*すなわち, $E_q(n,a)$ は ($q \to \infty$ のとき) 漸近的に Ramanujan グラフとなる．*

注意 3.5. n が奇数かつ $a = 0$ のとき, 実際は $E_q(n,a)$ は *Ramanujan* グラフとなる．

注意 3.6. ネットワークは, 「よく結ばれて」いて, かつ「辺が多すぎない (疎である)」という 2 つの相反する要請を満たしてほしい．しかし $E_q(n,a)$ の次数を見ると, 辺が多くなってしまうように思われる．一般に, *Ramanujan* グラフの構成の問題においては, 固定された次数に対する *Ramanujan* グラフの頂点増大無限列を作ることがゴール

になっている（と思われる）. なぜなら, 固定された次数に対して, そのような列が取れれば, 十分大きな頂点数に着目したとき疎であるような *Ramanujan* グラフが得られる（前述の *Ramanujan* グラフの登場の流れから, 1つ目の要請は満たされていて, インターネットのネットワークなどを考えると大きなものがほしいはず）. しかし, 現在のところ, そのような無限列の存在性は任意の次数に対して非構成的手法で示されているが, 明示的構成に関しては, 非常に限られた次数と頂点数のパラメータに対してしか知られていない. よって, *Euclidean* グラフのような次数が固定されない *Ramanujan* グラフの頂点増大列も興味深い対象である. 詳細は *[10], [15]* 等を参照されたい.

4. Erdősの距離問題

Erdősの距離問題は, Erdős [7] の仕事から始まり, 今日まで多くの数学者が挑戦してきた問題である. より詳細については, 教科書 [8] 等を参照されたい.

問題 4.1 ([7])**.** 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $\Delta(X) := \{e(x,y) \mid x,y \in X, x \neq y\}$ とおく. このとき, 自然数 m に対し, $g_n(m) := \min\{|\Delta(X)| \mid |X| = m\}$ を決定せよ.

例えば, $n = 2$ のとき, 容易にわかるとおり $g_2(3) = 1$, $g_2(4) = 2, \ldots$ となる. しかし, $n = 2$ のときにおいても, m が大きくなると $g_2(m)$ を決定することは極めて難しい. $n = 2$ の場合は, 2015年に Guth-Katz [9] によって, 次の結果が得られている.

定理 4.2 ([9])**.**

$$g_2(m) \geq m^{1-o(1)}.$$

また一般の n に関しては Solymosi-Vu [14] による次の結果が知られている.

定理 4.3 ([14])**.**

$$g_n(m) \geq \Omega(m^{2/n-2/n(n+2)}).$$

一方で, 有限空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ 上で, Erdős の距離問題を考える研究が Bourgain-Katz-Tao [5], Iosevich-Rudnev [11] らによって行われている.

問題 4.4 ([11])**.** $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対し, $\Delta_d(X) := \{d(x,y) \mid x,y \in X, x \neq y\}$ とおく. このとき, 自然数 m に対し, $g_{q,n}(m) := \min\{|\Delta_d(X)| \mid |X| = m\}$ を決定せよ.

本問題は Erdős の距離問題の自然な類似・拡張であり, 加法的数論における "sum-product estimate" の問題と関連する (興味のある方は, [5, Section 7] 等を参照されたい). 現在のところ, 次の結果がもっともよい評価であるように思われる.

定理 4.5 ([9])**.** 十分大きな定数 C に対し $m \geq Cq^{\frac{n}{2}}$ ならば,

$$g_{q,n}(m) \geq \min\Big\{q, \frac{m}{q^{\frac{n-1}{2}}}\Big\}.$$

オリジナルの証明では Fourier 解析の手法が用いられているが, Vinh [16] によって, Euclidean グラフの固有値とランダムグラフの理論における結果を用いたグラフ理論的な別証明が与えられた. 次節で述べる著者の主結果も, Vinh [16] のアプローチから着想を得ている.

5. s-距離集合と主結果

距離集合の問題は「均整の取れた点の配置とは何か?」という問いに端を発し, 代数的組合せ論や離散幾何学で研究されてきた. より詳細は, 坂内-坂内 [2] 等を参照されたい.

問題 5.1. s を正の整数とする. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $|\Delta(X)| = s$ が成り立つとき, X を $\mathbb{R}^n$ 上の s-距離集合とよぶ. $\mathbb{R}^n$ 上の s-距離集合のサイズの最大値 $f_n(s)$ を求めよ.

この問題については, Bannai-Bannai-Stanton [3] による次の結果がよく知られており, 定理内の評価で等号を達成する例などについて盛んに研究されている.

定理 5.2 ([3])**.**

$$f_n(s) \leq \binom{n+s}{s}.$$

本稿では有限空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ における s-距離集合を定義し, 上記の問題の自然な類似を考える (ただし, もともとの問題の幾何的な動機からは離れてしまったものになるかもしれない).

問題 5.3. $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対して, $|\Delta_d(X)| = s$ が成り立つとき, X を $\mathbb{F}_q^n$ 上の s-距離集合とよぶ. このとき, $\mathbb{F}_q^n$ の s-距離集合の濃度の最大値 $f_{n,q}(s)$ を求めよ.

以下が本稿における主結果である.

定理 5.4. 任意の s と $n \geq 2$, そして十分大きな q に対し, 次が成り立つ.

$$f_{n,q}(s) \leq \frac{2sq^{\frac{n-1}{2}} + 1}{1 - o(1)}.$$

以下では証明のアイデアを述べる. まず, ランダムグラフの理論において次の性質がよく知られている.

補題 5.5 (e.g. [1])**.** G を非 2 部的な k-正則 n 頂点グラフとする. このとき, G の任意の頂点部分集合 X に対し,

$$\left| e_G(X) - \frac{k}{2n}|X|^2 \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \lambda(G) \cdot |X|$$

が成り立つ. ただし, $e_G(X)$ は X 内に両端点をもつ G の辺の総数とする.

さて, 命題 2.2 より 2.3 から, $e(B)$ の上界が q と n を用いて表される. すなわち,

$$e_{E_q(n,a)}(X) \leq \frac{2q^{\frac{n-1}{2}}}{2}|X| + \frac{q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})}{2q^n}|X|^2. \tag{1}$$

さらに, $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対して,

$$\binom{|X|}{2} = \sum_{a \in \Delta_d(X)} e_{E_q(n,a)}(X). \tag{2}$$

いま, X が $\mathbb{F}_q^n$ 上の s-距離集合であるとすると, $|\Delta_d(X)| = s$ である. さらに, $a_1 \neq a_2$ ならば $E_q(n, a_1)$ と $E_q(n, a_2)$ は辺を共有しないことに注意し, (1) を (2) に代入し $|X|$ について解くことで, 定理を得る.

6. 諸注意

本節では, 関連する諸注意を述べる. まず $\mathbb{F}_q$ 上の非退化な2次形式 Q に対し, $d(x,y)$ の代わりに $Q(x-y)$ をとっても, すなわち有限空間 $(\mathbb{F}_q^n, Q)$ 上で s-距離集合の問題を考えても同様の結果が得られる. ここでは, Euclidean グラフの代わりに一般化された Euclidean グラフ $E_q(Q,n,a)$ を考える. ただし, グラフ $E_q(Q,n,a)$ は, 頂点集合に $\mathbb{F}_q^n$ をもち, 異なる2頂点 x,y が $Q(x-y)=a$ のとき隣接すると定義されるグラフである. このグラフは Bannai-Shimabukuro-Tanaka [4] によって定義され, Ramanujan グラフであるかどうかが議論されている. その際 $E_q(Q,n,a)$ の固有値も Kloosterman 和で表されることが代数的組合せ論におけるアソシエーションスキームの指標表を見ることで示されている. しかし (本質的には同じなのかもしれないが), [13] または Carlitz [6] の初等的な指標和の計算を用いれば, 彼らが示した事実は単純な計算から示すことができる.

また, 非 Euclid 空間である距離空間の一つとして, 複素上半平面があるが, 上半平面についても有限体上への類似 (有限上半平面) が与えられている.

定義 6.1 (see [15] or [10])**.** *δ を $\mathbb{F}_q$ の非平方元とする. このとき, $H_q := \{x+y\sqrt{\delta} \mid x,y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0\}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の有限上半平面とよぶ. また, H_q の2点 z, w の "Poincaré距離" を*

$$P(z,w) = \frac{N(z-w)}{Im(z)Im(w)} \in \mathbb{F}_q$$

とおく. ただし $z = x+y\sqrt{\delta} \in H_q$ に対して, $N(z) = z\bar{z} = (x+y\sqrt{\delta})(x-y\sqrt{\delta})$, $Im(z)=y$ とする.

$a \in \mathbb{F}_q$ に対して, 頂点集合に H_q を持ち, 異なる2点 z, w が $P(z,w)=a$ のとき隣接すると定義されるグラフを $X_q(\delta,a)$ で表す. $X_q(\delta,a)$ は q^2-q 個の頂点を持ち, $a \neq 0, 4\delta$ のとき連結な $(q+1)$-正則グラフになる. また $a=0,4\delta$ のときは非連結であり, 各連結成分が2点からなることが知られている ([15] または [10] 参照). さらに, $a \neq 0, 4\delta$ のときは, Soto-Andrade 和の評価から $X_q(n,a)$ は Ramanujan グラフとなる ([15] 参照). 以上から主定理の証明と同様にして次の定理が得られる.

定理 6.2. *H_q 上の "Poincaré距離"P に関する s-距離集合のサイズの最大値を $h_q(s)$ とおく. このとき,*

$$h_q(s) \leq \frac{2s\sqrt{q}+1}{1-o(1)}.$$

参考文献

[1] N. Alon, J. H. Spencer, The Probabilistic Method, John Wiley & Sons, Inc., 2016.

[2] 坂内英一, 坂内悦子, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー, 1999.

[3] Ei. Bannai, Et. Bannai, D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space II, *Combinatorica* **3** (1983), no. 2, 147–152.

[4] Ei. Bannai, O. Shimabukuro, H. Tanaka. Finite Euclidean graphs and Ramanujan graphs. *Discrete Math.* **309** (2009), no. 20, 6126-6134.

[5] J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, A sum-product estimate in finite fields, and applications, *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), no. 1, 27–57.

[6] L. Carlitz, Weighted quadratic partitions over a finite field, *Canadian J. Math.* **5** (1953), 317-323.

[7] P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly* **53**, (1946), 248–250.

[8] J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger, The Erdős Distance Problem, American Mathematical Society, 2011.

[9] L. Guth, N. H. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane, *Ann. of Math.* (2) **181** (2015), no. 1, 155–190.

[10] 平松 豊一, 知念 宏司, 有限数学入門 有限上半平面とラマヌジャングラフ, 牧野書店, 2003.

[11] A. Iosevich, M. Rudnev, Erdős distance problem in vector spaces over finite fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 12, 6127–6142.

[12] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* **8** (1988), no. 3, 261–277.

[13] A. Medrano, P. Myers, H. M. Stark, A. Terras, Finite analogues of Euclidean space, *J. Comput. Appl. Math.* **68** (1996), no. 1-2, 221-238.

[14] J. Solymosi, V. H. Vu, Near optimal bounds for the Erdős distinct distances problem in high dimensions, *Combinatorica* **28** (2008), no. 1, 113–125.

[15] A. Terras, Fourier Analysis on Finite Groups and Applications, Cambridge University Press, 1999.

[16] L.A. Vinh. Explicit Ramsey graphs and Erdős distance problems over finite Euclidean and non-Euclidean spaces. *Electron. J. Combin.* **15** (2008), no. 1, #R5.