Bicategory of Classical First-Order Theories

荒武 永史 (Hisashi Aratake) * †

概要

圏論的一階述語論理は、数理論理学（特にモデル理論）の圏論的解釈として、Makkai らによって創られた分野である。彼らの研究により、Gödel の完全性定理や Beth の定義可能性定理が圏論的に一般化された。本講演では、古くから知られていた「モデル理論と圏論の対応」が「古典一階理論の双圏 $\mathfrak{Th}$ と Boolean pretopos の 2-圏 $\mathfrak{BPretop}_*$ との双同値」として統一される、という結果を紹介する。さらに、この枠組みによるモデル理論への応用の展望を示す。

1 理論と翻訳

現代数学においては、

(1) 興味のある構造の性質を抽出して公理系をつくり、
(2) 公理系から定理を証明し、
(3) 最後に元の構造に定理を適用する

というプロセスが重要であることは周知の通りである。数理論理学者はこれらのプロセスについて数学的考察を行う、すなわち、

- 構造とは何か
- 「構造がある性質を満たす」とはどういうことか
- 「公理系から定理を証明する」とはどういうことか

を論理学の言葉によって定義し、数学的手法[*1]を用いてこれらの概念を分析する。数理論理学者は「数学者（の営み）を数学する」という意味で「メタ数学者である」とも言える。通常、数学者の興味関心は、特定の構造の研究にある。一方、数理論理学者は「公理系」「証明」なども一つの構造と見なして研究対象とする。本研究は数理論理学の一領域である**モデル理論**を背景としているので、以後はモデル理論の話題に絞って概説する。key concept となる「理論」「モデル」「翻訳」という 3 つの概念について順番に紹介していく。

* 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系博士後期課程 1 回. 日本学術振興会特別研究員 DC. 本研究は JSPS 科研費 17J06041 の助成を受けたものです。

† e-mail: aratake@kurims.kyoto-u.ac.jp

*1 ここでいう「数学的手法」は、メタ論理体系によって形式化されなければならない。

1.1　古典一階理論とそのモデル

モデル理論では「公理系を満たす構造たちの性質」を「公理系の性質」と関連づけて考察する。本稿では、環・体や順序集合の具体例を通して、種々の概念を紹介する。

$$xy = yx, \qquad (x \le y) \vee (y \le x), \qquad x \ne 0 \to \exists y(xy = 1)$$

などの自由変数を含むような文のことを**論理式**という。ここで、論理式には一般に

論理結合子: ∧, ∨, →, ¬ (not)
量化子: ∃, ∀

が含まれることに注意する。$xy = yx$ は 2 つの自由変数を持つ一方、$\forall x \forall y(xy = yx)$ は全ての変数が量化（束縛）されている。後者のような論理式のことを**閉論理式**といい、閉論理式の集合のことを（**古典一階**）**理論**という[*2]。これが、数理論理学における「公理系」の定義である。

理論 T が与えられたときに、「T の公理をすべて満たす構造」のことを T の**モデル**という：

理論 T	群（resp. アーベル群、環、体、半順序、線型順序、順序体 etc.）の公理系
T のモデル	群（resp. アーベル群、環、体、半順序、線型順序、順序体 etc.）

モデル理論において理論とモデルの関係を論じるには、まず与えられた理論の**モデルが存在する**かどうかを知る必要がある。Gödel の完全性定理から、

$$\text{理論 } T \text{ のモデルが存在} \iff T \text{ が無矛盾}$$

ということが知られている。また、完全性定理の系として、「T の任意の有限部分集合がモデルを持つならば、T 自身もモデルを持つ」という**コンパクト性定理**が成り立つ。

モデルの存在が保証された後は、理論の次のような問題について考察をしていく。

- T が“いいモデル”を持つか？
- T のモデルは同型を除いてどのくらい存在するか？

ここで“いいモデル”とは、

- 多くの方程式系が共通解を持つような“飽和モデル”
- 任意のモデルに埋め込めるような“素モデル”（e.g. 標数 p の素体）

などのことを指す。これらの問題を考える際には、モデルが論理式（の族）に対してどのように振る舞うかが重要である。特に、“T と無矛盾な論理式系の数が少ない”ときに T は**安定**であるといい、安定な理論の研究は現代モデル理論の根幹を成している。実際、適切な強さの安定を持つ理論に対しては、体の超越次元やベクトル空間の次元のような**次元の一般論**が展開でき、“いいモデル”の存在やモデルの同型による分類が与えられる。

[*2] ここで「古典一階」というのは、論理体系の記述能力、言い換えれば「どの程度複雑な公理が許されているのか」を表す。例えば、ねじれのないアーベル群の公理系を記述するには古典一階（述語）論理では不十分で、**無限論理**で考える必要がある。

1.2　理論間の翻訳

理論の概念が定義されたことにより、理論自身が数学的対象と見なされる。すると、複数の理論の間の関係性を議論しようとするのは、自然な発想であろう。複数の理論を関係づけるような具体例をいくつか挙げる。

Example 1.1.

(1) 理論の拡大 $T \subseteq T'$、すなわち公理の追加。
(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ の理論は（原理的には）実数体 $\mathbb{R}$ の理論に帰着できる。より一般に任意の実閉体 R に対して、$\mathbb{C}$ と同様の方法で R^2 に演算を入れることで代数閉体が得られる。
(3) 代数閉体 k に対して、射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ は $k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の商空間として得られる。
(4) 群の作用 $G \times X \to X$ に対して、X を忘却して G を得る対応。 □

これらの具体例は**翻訳**という概念に一般化することができる。

Definition 1.2. T, T' を理論とする。T から T' への翻訳 $I \colon T \to T'$ とは、T-論理式 φ に対して "T'-論理式の商 φ^I/Δ^I" を対応させるもので、これらのデータによって T'-モデルから自然に T-モデルがつくれるようなもの。 □

理論の種々の性質は翻訳可能性で保たれることが多い。例えば、翻訳 $I \colon T \to T'$ が存在するとき、T' が安定ならば T も安定であることが知られている。したがって、翻訳について調べることは理論/モデルの性質を知るのに役に立つ。しかし、既存のモデル理論で翻訳が用いられるのは、非常に限定的な場面しかない。実際、上に挙げたような具体例について翻訳可能性を使ったり、あるいは「群・体などの詳しく調べられている構造に翻訳可能な」より一般の構造についての研究はあるが、翻訳から新たに翻訳を構成するなどといった研究はされていない。翻訳を通して**理論間の相互作用**を包括的に調べることは、本研究の目的の一つである。

2　圏論的一階述語論理

本節では、前節で見た理論・モデル・翻訳の概念が圏論的対応物を持つことを紹介する。

2.1　classifying pretopos

Definition 2.1 (*cf.* [2])**.** 理論 T に対して、"論理式の圏" $\mathcal{P}_T$ が構成できる[*3]。ここで、射 $[\chi] \colon \varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{y})$ は任意の T-モデルで次が成り立つような論理式 $\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$（の T-同値類）である：

$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \varphi(\boldsymbol{x}) \wedge \psi(\boldsymbol{y}), \qquad \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \qquad \varphi(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{y} \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

このとき、$\mathcal{P}_T$ は *Boolean pretopos* と呼ばれる圏になっている、すなわち、

- 有限極限を持つ。
- 任意の "同値関係" に関して、その coequalizer が存在。
- 部分対象の束 $\mathrm{Sub}(\varphi(\boldsymbol{x}))$ は Boole 代数。

[*3] 正確には、"論理式の商" まで含めて $\mathcal{P}_T$ が構成される。

- finite coproduct が存在して、それらは disjoint。
- 上に挙げた構造は pullback で保たれる。

$\mathcal{P}_T$ は T の *classifying pretopos* と呼ばれる。 □

classifying pretopos は命題論理における Lindenbaum 代数の類似になっており、理論に対する圏論的対応物である。ここで、集合と写像の圏 $\mathbf{Set}$ も Boolean pretopos であることに注意する。

$\mathcal{P}_T$ を用いると、T-モデルも圏論的に表現される：

Proposition 2.2. 任意の T-モデル $\mathcal{M}$ に対して、*pretopos functor* (= pretopos の構造を保つ函手) $G_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{P}_T \to \mathbf{Set}$ が誘導される。ここで、$G_{\mathcal{M}}$ は論理式 φ を**定義可能集合** $\varphi(\mathcal{M})$ に写す。

さらに、この対応 $\mathcal{M} \mapsto G_{\mathcal{M}}$ は次の圏同値を与える：

$$\mathbf{Elem}(T) \simeq \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})$$

- $\mathbf{Elem}(T)$ は T-モデルと**基本埋め込み**（= 任意の論理式の真偽を保つような強い準同型）の圏
- $\mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})$ は、$\mathcal{P}_T$ から $\mathbf{Set}$ への pretopos functor と自然変換の圏 □

上の命題より、T-モデルと pretopos functor は圏同値の意味で対応しており、classifying pretopos は "T-モデルを分類している" ということがわかる。

本稿で詳しく述べることはできないが、上のようなロジックと圏論の対応によって、ロジックの（メタ）定理の圏論的一般化が得られている：

- Gödel の完全性定理 vs. Deligne の定理（[7, Theorem 3.5.5], [4, §D3.3]）
- Beth の定義可能性定理（[6]）

2.2 翻訳と pretopos functor

続いて、翻訳に pretopos functor が対応することを見る。翻訳 $I\colon T \to T'$ とは、T-論理式 φ に対して T'-論理式の商 φ^I/Δ^I を対応させるものだった。この対応は、T-論理式の商から T'-論理式の商への対応に自然に拡張される。したがって、函手 $\mathcal{P}_I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が得られ、これは pretopos functor になる。

ここで、翻訳 $I\colon T \to T'$ が与えられると、T'-モデル $\mathcal{M}$ から自然に T-モデル $\mathcal{M}|_I$ が誘導されることを思い出そう。実はより強く、翻訳から函手 $\mathbf{Elem}(T') \to \mathbf{Elem}(T)$ が誘導される。一方、$\mathcal{P}_I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が構成されたので、次のような函手を考えることができる：

$$\mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_{T'}, \mathbf{Set}) \to \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set}) \qquad G \mapsto G \circ \mathcal{P}_I$$

これらの観察と **Proposition 2.2** より、次の図式は（自然同型を除いて）可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Elem}(T') \arrow[r, "(-)|_I"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{Elem}(T) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_{T'}, \mathbf{Set}) \arrow[r, "(-)\circ\mathcal{P}_I"] & \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})
\end{tikzcd}$$

したがって、翻訳によるモデルの対応は圏論的に表現される。

3 古典一階理論の双圏

以上で見てきたように、

$$\text{理論} \mapsto \text{Boolean pretopos} \qquad\qquad \text{翻訳} \mapsto \text{pretopos functor}$$

という対応がある一方で、逆向きの対応については先行研究ではほとんど調べられていなかった。実際、

任意の small Boolean pretopos はある理論の classifying pretopos と圏同値

という結果はよく知られていたが、

- 圏同値 $\mathcal{P}_T \simeq \mathcal{P}_{T'}$ があるときに、T と T' はモデル理論の言葉でどのような関係にあるか？
- 任意の pretopos functor $I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ は、T から T' への翻訳から誘導されるか？

といった問題について明確な回答は与えられていなかった。

そこで本研究ではまず、理論と翻訳に加えて**翻訳の間のホモトピー**という 2-射を持つような**双圏** $\mathfrak{Th}$ を定義し、上の対応が「small Boolean pretopos と pretopos functor と自然同型が成す 2-圏 $\mathfrak{BPretop}_*$」への pseudo-functor $\mathfrak{Th} \to \mathfrak{BPretop}_*$ を与えることを示した。さらに、この pseudo-functor が双圏の間の双圏同値になっていることを示すことで、上述の問題を解決した。

3.1 双圏 $\mathfrak{Th}$ の構成

Definition 3.1 (*cf.* [3, Chap. 5 §4(c)])**.** $I, J\colon T \to T'$ を翻訳とする。**ホモトピー** $h\colon I \Rightarrow J$ は、任意の T'-モデル $\mathcal{M}$ に対して T-モデルの同型 $\mathcal{M}|_I \simeq \mathcal{M}|_J$ を与えるような適切なデータから成る。 □

ホモトピー $h\colon I \Rightarrow J$ からは、自然な方法で自然同型 $\mathcal{P}_h\colon \mathcal{P}_I \Rightarrow \mathcal{P}_J$ が構成される。よって、理論・翻訳・ホモトピーから適当な 2-圏を定義できるように思われるが、ここで次のような問題が生じる：翻訳 $I\colon T_0 \to T_1$, $J\colon T_1 \to T_2$, $K\colon T_2 \to T_3$ に対して、$(KJ)I$ と $K(JI)$ は翻訳として一致するとは限らない[*4]。したがって、安直に $\mathfrak{Th}$ を 2-圏として定義することはできない。

一方、$K(JI)$ と $(KJ)I$ との間には自然にホモトピーが存在する。このように結合律（や恒等律）が同型な 2-射を除いて成立するような「弱い 2-圏」のことを**双圏**という（[5]）：

Proposition 3.2. 理論・翻訳・ホモトピーは双圏 $\mathfrak{Th}$ を構成する。

Proof 次の条件を確かめればよい：

- T から T' への翻訳とその間のホモトピーは圏 $\mathfrak{Th}(T, T')$ を成す。
- 自然な方法で"水平合成函手"$H_{TT'T''}\colon \mathfrak{Th}(T', T'') \times \mathfrak{Th}(T, T') \to \mathfrak{Th}(T, T'')$ が定義される。

[*4] この不一致は翻訳の定義に現れる技術的な条件に依る。大雑把に言えば、翻訳の定義に含まれるデータをできる限り最小限に抑えたとき、それを canonical な方法で論理式の対応に拡張することができないのが原因である。

- ホモトピー $h^{KJI}\colon (KJ)I \Rightarrow K(JI)$ は、次の図に現れる自然同型 h を誘導する：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Th}(T_2,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_1,T_2)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_1) \arrow[r, "\mathrm{id}\times H_{T_0T_1T_2}"] \arrow[d, "H_{T_1T_2T_3}\times\mathrm{id}"'] & \mathfrak{Th}(T_2,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_2) \arrow[d, "H_{T_0T_2T_3}"] \\
\mathfrak{Th}(T_1,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_1) \arrow[r, "H_{T_0T_1T_3}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "h"] & \mathfrak{Th}(T_0,T_3)
\end{tikzcd}$$

- 恒等律についても結合律と同様に適当なホモトピーが存在する。
- 以上のデータが coherence axiom を満たす。 ■

Theorem 3.3. 上述の対応は pseudo-functor $\mathfrak{Th}\to\mathfrak{BPretop}_*$ を与える。さらに、これは双圏同値になっている。 □

3.2 定理からの帰結

Definition 3.4. 理論 T, T' が**双翻訳可能**であるとは、翻訳 $I\colon T\to T'$, $J\colon T'\to T$ が存在して $JI\simeq\mathrm{id}_T$, $IJ\simeq\mathrm{id}_{T'}$ が成り立つことをいう。 □

双翻訳可能性は「双圏 $\mathfrak{Th}$ の中における同値」になっている。したがって、双圏同値を通して次が得られる：

Corollary 3.5. 理論 T, T' について、次は同値：

(1) T, T' は双翻訳可能
(2) 圏同値 $\mathcal{P}_T\simeq\mathcal{P}_{T'}$ が存在（この条件は**森田同値**とも呼ばれている） □

また、双圏同値から、特に hom-圏の間の函手 $\mathfrak{Th}(T,T')\to\mathfrak{BPretop}_*(\mathcal{P}_T,\mathcal{P}_{T'})$ が圏同値である。したがって、本質的全射性より、

Corollary 3.6. 任意の pretopos functor $\mathcal{P}_T\to\mathcal{P}_{T'}$ は、$\mathcal{P}_I$ の形の函手に自然同型。 □

以上より、本節のはじめに掲げた問題に対する回答が得られた。

4 Future Directions

本稿の最後に今後の展望を示す。

4.1 Category Theory for Model Theory

$\mathfrak{Th}$ と $\mathfrak{BPretop}_*$ の双圏同値を示したことにより、Boolean pretopos に関する定理をモデル理論の定理へと直接翻訳することが可能になる。これに基づいて、先行研究の延長として、「圏論を用いてモデル理論の定理を示す」という可能性がある：

(1) 理論の双翻訳可能性と classifying pretopos の圏同値（森田同値）が等価なので、「理論の性質で双翻訳可

能性で不変なものを圏論的に特徴づける」という問題が考えられる。例えば、理論の安定性は双翻訳可能性で不変であることが知られている。したがって、次の定義が well-defined になる：

Definition 4.1. small Boolean pretopos $\mathcal{B}$ に対して、ある安定な理論 T が存在して $\mathcal{B} \simeq \mathcal{P}_T$ であるとき、$\mathcal{B}$ は**安定**であるという。 □

この定義は圏論の言葉で書かれていないので、圏論的特徴付けを考えるのは自然である。もしモデル理論的性質を圏論的に特徴付けできた場合、その性質が種々の圏論的構成（Boolean pretopos の極限・余極限など）で閉じているかを調べることで、安定性の新しい判定法などが得られると期待される。

また、双翻訳可能性で不変な性質 P に対して、$\mathfrak{BPretop}_*^P$ を“性質 P を持つ”Boolean pretopos が成す $\mathfrak{BPretop}_*$ の充満部分-2-圏とするとき、$\mathfrak{BPretop}_*^P$ と $\mathfrak{BPretop}_*$ の関係性を調べることも有用である。特に、埋め込み $\mathfrak{BPretop}_*^P \hookrightarrow \mathfrak{BPretop}_*$ が左-2-随伴を持つことがわかれば、任意の理論 T に対して性質 P を持つような T^P で適当な普遍性を持つものが構成できる。

(2) §1.2 の最後で言及した「翻訳の概念を通して理論間の相互作用を調べる」という問題に対しても、圏論的手法が有用になると予想される。実際、T-モデル $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の elementary diagram と呼ばれる理論 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ がモデル理論では重要で、この構成は双圏同値を通して Boolean pretopos のある種の weighted colimit として表現される。このようなモデル理論における理論の構成と圏論的構成の対応を他の例でも調べることにより、**理論の新しい構成法**が得られると予想される。

(3) classifying pretopos について考察するだけでも先述のような応用の可能性があるが、さらに踏み込んで *classifying topos* という圏を考察することもできる。理論 T の classifying topos は、$\mathcal{P}_T$ に自然に入る Grothendieck 位相 J_T を利用して、$\mathcal{P}_T$ 上の J_T-層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}_T, J_T)$ として定義される。一般に層の圏は *Grthendieck topos* と呼ばれる非常にいい圏になっている。$\mathbf{Sh}(\mathcal{P}_T, J_T)$ を $\mathbf{Set}[T]$ と書くことにする。classifying topos は次のような性質を持つ：

- T-モデルは“$\mathbf{Set}[T]$ の点”に対応する。
- $\mathbf{Set}[T]$ から $\mathcal{P}_T$ を復元することが可能である。
- $\mathbf{Set}[T]$ は *coherent topos* と呼ばれるいい性質を持つ Grothendieck topos になっている。
- $\mathbf{Set}[T]$ は様々な同値な構成が存在する：T-モデルの圏に Grothendieck 位相を入れたものや、T-モデルとその間の**同型**から構成される位相亜群から $\mathbf{Set}[T]$ を構成することができる。

したがって、$\mathcal{P}_T$ の情報を保ったままで、より幅広い表現を使ってモデル理論と圏論の関係性を議論することができる。この考え方は、Caramello の “toposes as bridges” の思想に基いている（[1]）。

4.2 Model Theory for Category Theory

モデル理論と圏論の対応に基づけば、「モデル理論の手法を用いて圏論の定理を示す」という可能性も考えられる。実際、pretopos に関する多くの定理はモデル理論的な証明に翻訳することが可能である。さらには、$\mathfrak{BPretop}_*$ における weighted colimit の構成は、2-圏論の一般論を用いるよりもモデル理論的に証明したほうが簡単である。このようにモデル理論的手法が圏論的論理学にとって有用である一方、(small) pretopos そのものが圏論的論理学以外の数学で出てくる場面は多くないため、この手法は一見して数学にあまり関係しないように思われる。

しかし、pretopos から topos へと興味を移すと事情が変わってくる。上述の構成によって pretopos は coherent topos と対応することが知られており、しかも coherent topos は**数学においてもしばしば重要な役割を果たす**。例えば、ホモトピー論で使われる単体的集合の圏 $\mathbf{Set}_{\Delta}$ や、代数幾何で現れる種々の topos [*5]は coherent topos である。また、任意の coherent topos はある理論の classifying topos になる。したがって、圏論的論理学（モデル理論）の手法を用いて数学に現れる topos を調べることが可能である。この方向性の先行研究はほとんど存在しないが、数理論理学と数学との新しいつながりを示唆しているという点で大きな可能性を秘めている、と筆者は考えている。

参考文献

[1] O. Caramello. "The Unification of Mathematics via Topos Theory". June 20, 2010. arXiv: `1006.3930 [math.CT]`.

[2] V. Harnik. "Model Theory vs. Categorical Logic: Two Approaches to Pretopos Completion (a.k.a. T^{eq})". In: *Models, Logics, and Higher-Dimensional Categories: A Tribute to the Work of Mihály Makkai*. MakkaiFest. (Montréal, June 18–20, 2009). Ed. by B. Hart et al. CRM Proceedings & Lecture Notes 53. Centre de Recherches Mathématiques. American Mathematical Society, 2011, pp. 79–106.

[3] W. Hodges. *Model Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 42. Cambridge University Press, 1993.

[4] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Vol. 2. Oxford Logic Guides 44. Clarendon Press, 2002.

[5] T. Leinster. "Basic Bicategories". Oct. 4, 1998. arXiv: `math/9810017`.

[6] M. Makkai. "Duality and Definability in First Order Logic". In: *Memoirs of the American Mathematical Society* **105**.503 (1993). x+106 pp. DOI: `10.1090/memo/0503`.

[7] M. Makkai and G. E. Reyes. *First Order Categorical Logic: Model-Theoretical Methods in the Theory of Topoi and Related Categories*. Lecture Notes in Mathematics 611. Springer-Verlag, 1977.

[*5] そもそも topos の概念は、数論幾何におけるコホモロジー論の研究の過程で Grothendieck らによって生みだされたものである。