初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の時間発展による単峰性

北海道大学大学院理学院 数学専攻
植田 優基 (Yuki UEDA)*

本研究は, 長谷部 高広氏 (北海道大学) との共同研究である (詳細は [6] による).

1 単峰性と強単峰性

確率論や数理統計学で重要な性質の一つとして, 分布の単峰性というものがある.

定義 1.1. 1 次元確率分布 μ がモード $c \in \mathbb{R}$ の単峰であるとは, μ が以下のように表示されることをいう.

$$\mu = \mu(\{c\})\delta_c + f(x)dx,$$

ただし $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $(-\infty, c)$ 上で単調非減少, (c, ∞) 上で単調非増加な関数である. 値 $\mu(\{c\})$ は 0 となることもある. また, モードを指定せず単に μ が単峰であるということもある. 更に, 集合 T を $[0, \infty)$ の部分集合, $t \geq 0$ に対して X_t を確率分布 μ_t に従うある確率空間で定義された確率変数としたとき, 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が T で単峰であるとは, 確率分布 μ_t が $t \in T$ で単峰であることをいう.

分布の単峰性は, 数理統計学の視点から見れば, 分布の散布度, 歪度などの分布に現れる統計的特性を統計指標で要約するために必要な性質として, 確率論の視点から見れば, L 分布 (自己分解可能分布) のもつ著しい性質として現れてくる. 例えば, ある確率空間上で定義された 1 次元ブラウン運動は全ての時刻で単峰である. なぜなら, ブラウン運動をなす分布族は正規分布族であり, 正規分布 $N(0, t)$ は全ての $t > 0$ でモード 0 の単峰確率分布となるからである. なおブラウン運動は安定過程, 自己分解可能過程, そしてレヴィ過程 (無限分解可能過程) と呼ばれる広いクラスの確率過程の代表的な例である. より一般に安定過程, 自己分解可能過程やレヴィ過程の単峰性に関する研究は, 主に山里, 渡辺, Wolfe らを中心に進められてきた. 有名な結果として, 安定過程と自己分解可能過程は全ての時刻で単峰であることが知られている. 対して一般のレヴィ過程に関しては, 全ての時刻で単峰とはならないレヴィ過程が存在する事が知られている. 具体的には μ を無限分解可能分布としたとき, もし μ がガウス部分 (レヴィ-ヒンチン表現をしたときに現れる非負係数部分) をもたず, そのレヴィ測度が 0 でない平均と有限の分散の値をもつならば μ からなるレヴィ過程は十分大な時刻で単峰ではないという結果がある (これらの詳細は [10], [11], [12] などによる).

つぎに, 単峰性より強い性質として強単峰性というものについて解説する. 一般に単峰性は分布のたたみこみによって保存されない. つまり単峰確率分布 μ, ν でそれらのたたみこみ分布 $\mu * \nu$ が単峰でないようなものが存在する (構成については [9] を参照). ここで強単峰性の定義は次のようにされる.

定義 1.2. 確率分布 μ が強単峰であるとは, 任意の単峰確率分布 ν に対して, たたみこみ $\mu * \nu$ が単峰となることをいう. また, $t \geq 0$ に対して X_t を確率分布 μ_t に従うある確率空間で定義された確率変数とする. このとき確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が $T \subset [0, \infty)$ で強単峰であるということを, 確率分布 μ_t が $t \in T$ で強単峰であることと定義する.

デルタ確率測度は単峰なので, 確率分布が強単峰ならばそれは自動的に単峰となる. また特殊な場合として μ, ν が対称な単峰確率分布であれば $\mu * \nu$ もまた対称な単峰確率分布となる. 一般に単峰確率分布同士のたたみこみが単峰であるか否かを確認するのは容易ではないが, Ibragimov は確率分布が強単峰になるための必要十分条件を次で与えた.

命題 1.3. (**Ibragimov**: [7]) デルタ分布でない確率分布 μ に関して以下は同値である.
(1) μ は強単峰である,
(2) $-\infty \leq a < b \leq \infty$ と区間 (a, b) 上の対数凹関数 $f(x)$ が存在して, $\mu((a, b)) = 1$ かつ μ は (a, b) 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続で $f(x)$ がその密度関数となる.

*e-mail: yuuki1114@math.sci.hokudai.ac.jp

この結果によりブラウン運動はすべての時刻で強単峰になることが分かる. さらに Ibragimov は, すべての時刻で強単峰な安定過程はブラウン運動のみであるという事を示した (詳細は [9] を参照).

2 自由確率論と単峰性

第 1 節では主に確率論における単峰性, 強単峰性に関する準備を行った. この節では, 非可換確率論の一つである自由確率論と呼ばれる概念の準備と, 自由確率論における単峰性に関する議論を行う.

2.1 自由独立性と自由たたみこみ

自由確率論における重要な概念である自由独立と自由たたみこみについて解説する. そのために, まず非可換確率空間と非可換確率変数の定義をする.

定義 2.1. $\mathcal{A}$ を単位元 $1_{\mathcal{A}}$ をもつ複素数体 $\mathbb{C}$ 上の (非可換) 代数とする.
(1) $\mathcal{A}$ が $*$-代数であるとは, 代数 $\mathcal{A}$ に以下の条件をもつ写像 $*:\mathcal{A}\ni a\mapsto a^*\in\mathcal{A}$ を付随したものをいう: 全ての $a,b\in\mathcal{A}$ に対して (i) $(ab)^*=b^*a^*$, (ii) $(a^*)^*=a$.
(2) $*$-代数 $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数 ϕ が状態であるとは, $\phi(1_{\mathcal{A}})=1$ で, 全ての $a\in\mathcal{A}$ に対して $\phi(a^*a)\geq 0$ が成り立つときをいう.
(3) 組 $(\mathcal{A},\phi)$ が非可換 ($*$-) 確率空間であるとは, $\mathcal{A}$ が単位元をもつ $\mathbb{C}$ 上 ($*$-) 非可換代数, ϕ をその上の状態であるときをいう.
(4) $(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間とするとき, $\mathcal{A}$ の元のことを (非可換) 確率変数, ϕ のことを期待値 (関数) と呼ぶことがある. とくに $a\in\mathcal{A}$ が自己共役 (すなわち, $a^*=a$) のとき, a を実確率変数と呼ぶ.
(5) $a\in\mathcal{A}$ に対して, 値 $\phi((a^*)^{m_1}a^{n_1}\cdots(a^*)^{m_k}a^{n_k})$ $(m_1,n_k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\, m_2\cdots m_k,n_1,\cdots n_{k-1}\in\mathbb{N})$ のことを a のモーメントという. とくに, 値 $\phi(a^n)$ を a の n 次モーメントという. 一般に $a_1,\cdots,a_n\in\mathcal{A}$ とそれらの共役たちの積の期待値のことを, $a_1,\cdots,a_n$ の混合モーメントという.

非可換確率変数同士の積は非可換であるので, 一般にはこれらの混合モーメントを計算することは困難である. ここで, 非可換確率変数の自由独立性というものを定義する.

定義 2.2. $(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間とする. このとき,
(1) $\mathcal{A}$ の $*$-部分代数 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ が自由独立であるとは, 任意の $1\leq i_1,\cdots,i_k\leq n$ で $i_1\neq i_2$, $i_2\neq i_3$, $\cdots$, $i_{k-1}\neq i_k$ なるものと, 任意の $a_{i_l}\in\mathcal{A}_{i_l}$, $(l=1,\cdots,k)$ で $\phi(a_{i_l})=0$, $(l=1,\cdots,k)$ となるとき,

$$\phi(a_{i_1}\cdots a_{i_k})=0, \tag{2.1}$$

が成立することをいう.
(2) $\mathcal{A}$ の部分集合 $A_1,\cdots,A_n$ が自由独立であるとは, 単位元 $1_{\mathcal{A}}$ と集合 A_i で生成される $*$-部分代数を $\mathcal{A}_i:=*\text{-Alg}(1_{\mathcal{A}},A_i)$, $(i=1,\cdots,n)$ とおくとき, $\mathcal{A}_1\cdots,\mathcal{A}_n$ が自由独立であることをいう.
(3) $a_1\cdots,a_n\in\mathcal{A}$ を (実) 確率変数とする. このとき $a_1,\cdots,a_n$ が自由独立であるとは, $A_i:=\{a_i\}$, $(i=1,\cdots,n)$ を $\mathcal{A}$ の部分集合として, $A_1,\cdots,A_n$ が自由独立であることをいう.

確率変数が自由独立である時, 例えば次のような混合モーメントを計算することができるようになる.

例 2.3. a_1,a_2 を自由独立な確率変数とする. このとき,
(1) $\phi(a_1a_2)=\phi(a_1)\phi(a_2)$,
(2) $\phi(a_1a_2a_1)=(\phi(a_1^2)-\phi(a_1)^2)\phi(a_2)$.
実際, (1) は $X_i:=a_i-\phi(a_i)1_{\mathcal{A}}$ $(i=1,2)$ とおくことで, X_1,X_2 もまた自由独立な確率変数となり, $\phi(X_1)=\phi(X_2)=0$ なので $\phi(X_1X_2)=0$. 後はこの左辺を展開することで $\phi(a_1a_2)$ の計算結果が得られる. (2) も同様である.

この概念は確率論における"独立性"と類似した概念である. 実際, たとえば (可積分な) 確率変数 X,Y が独立であれば, $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ が成立するし, その他にも期待値の計算がいくつかできるようになる. このようにして, 独立性とはいうものは混合モーメント (期待値) に何らかの計算規律を与える物として解釈することが出来る. では自由独立となるような確率変数は本当に存在するのかという疑問が生じるが, 実際にこのような確率変数は存在する. このことを解説するためにいくつかの準備をしていく.

定義 2.4. G を群, $G_1, \cdots, G_n$ を G の部分群とする．また e を $G, G_1, \cdots, G_n$ の単位元とする．このとき, $G_1, \cdots, G_n$ が G において自由であるとは, 任意の $1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$ で $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $\cdots$, $i_{k-1} \neq i_k$ なるに対して, $g_{i_l} \in G_{i_l} \setminus \{e\}$, $(l = 1, \cdots, k)$ であるならば,

$$g_{i_1} \cdots g_{i_n} \neq e,$$

をみたすことをいう．

つぎに自由積を定義する．群 G, H が与えられたとき, これらの自由積とは元が G と H の縮約された語であり, 積は連結して縮約したものとする群のことである．G と H の自由積を $G * H$ とかく．構成から G, H は $G * H$ の部分群として含まれる．たとえば, $\mathbb{F}_n$ を n 個の生成元からなる自由群としたとき, $\mathbb{F}_m * \mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{m+n}$ である．また n 個の群に関しても同様にして自由積が定義でき, $G_1 * \cdots * G_n$ と表すことにする．最後に群 G から生成される基本的な非可換確率空間について説明する．G から生成される ($\mathbb{C}$ 上の) 群環を $\mathbb{C}[G]$ で表すことにする．$\mathbb{C}[G]$ は以下の共役演算を入れることによって自然と (単位的な)$*$-代数になる．

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right)^* := \sum_{g \in G} \overline{\alpha_g} g^{-1}, \qquad \alpha_g \in \mathbb{C}.$$

さらに $\mathbb{C}[G]$ 上の線形汎関数として以下のようなものを定義する．

$$\phi_G \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) := \alpha_e$$

ただし, $e \in G$ は G の単位元とする．このとき ϕ_G は $\mathbb{C}[G]$ 上の状態となり, これらによって非可換確率空間 $(\mathbb{C}[G], \phi_G)$ が構成される．これらの定義から以下のような事実が知られている．

命題 2.5. $G_1, \cdots, G_n$ を群とする．このとき次の 2 条件は同値である．
(1) $G_1, \cdots, G_n$ は $G = G_1 * \cdots * G_n$ において自由である．
(2) $\mathbb{C}[G]$ の $*$-部分代数 $\mathbb{C}[G_1], \cdots, \mathbb{C}[G_n]$ は自由独立である．

(2) の定義は (2.1) において ϕ_G を使うだけである．ただし $\phi_G|_{\mathbb{C}[G_i]} = \phi_{G_i}$, $(i = 1, \cdots, n)$ であることに注意する．これより自由群 $\mathbb{F}_{i_1}, \cdots, \mathbb{F}_{i_n}$, $(i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N})$ を考えれば, $\mathbb{F}_{i_1}, \cdots, \mathbb{F}_{i_n}$ は $\mathbb{F}_{i_1 + \cdots + i_n}$ において自由であるから, 上の命題から $\mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_1}], \cdots, \mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_n}]$ は $\mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_1 + \cdots + i_n}]$ の $*$-部分代数として自由独立である．ゆえに自由独立な確率変数の存在がわかった．なお自由独立の概念をはじめとする自由確率論は, 作用素環論に現れる (自由) 群フォンノイマン環の構造解析のために, Voiculescu によって展開されたのが始まりである (これらの詳細や命題 2.5 の証明などは [8] が詳しい)．

つぎに確率論の時と同様, 非可換確率変数に従う確率分布と (自由) たたみこみの定義を与える．

定義 2.6. $(\mathcal{A}, \phi)$ を非可換確率空間として $a \in \mathcal{A}$ を実確率変数とする．もし $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が存在して,

$$\phi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

が成立するとき, このような μ は次の意味で一意である: もし他の確率測度 ν が (2.2) を満たすとき, 任意の $f \in C_b(\mathbb{R})$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x),$$

が成立する．この μ を確率変数 a の確率分布という．もしくは, 確率変数 a は確率分布 μ に従うという．

このとき μ は $\mathbb{R}$ 上のコンパクトサポートをもつ確率測度であるという事に注意する．次に a, b を自由独立な実確率変数として, μ, ν をそれぞれ a, b の従う確率分布とする．このとき Voiculescu は a と b の和の確率分布が存在することを示した．この確率分布を $\mu \boxplus \nu$ と表すことにする. すなわち,

$$\phi((a+b)^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n d(\mu \boxplus \nu)(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

μ, ν はコンパクトサポートをもつので, $\mu \boxplus \nu$ もまたコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上の確率測度となる.

この段階ではコンパクトサポートをもつ確率分布同士の自由たたみこみしか定義されていなかったが, Voiculescu, Bercovici は, 複素関数の手法 (Cauchy 変換, Voiculescu 変換など) を用いて, 一般の確率分布に対しての自由たたみこみの定義を与えた (詳しくは [2] を参照).

2.2 自由ブラウン運動の単峰性

自由確率論においても, 確率分布の単峰性の定義は確率論の場合とまったく同様である. ここで全ての時刻で単峰になるような非可換確率過程を与える.

定義 2.7. ある (非可換) 確率空間上で定義された非可換実確率過程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元自由ブラウン運動であるとは, 次の条件をみたすものをいう.
(1) $W_0 = 0$,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は自由独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対して, $W_s - W_t$ は分散 $s-t$ の標準ウィグナー半円分 $w_{s-t}(dx)$ に従う.

ここで分散 $t>0$ の標準ウィグナーの半円分布とは以下のような連続密度関数をもつ確率分布 $w_t(dx)$ のことである.

$$w_t(dx) := \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2} \cdot 1_{[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]}(x)dx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

まずこのような非可換確率過程は存在することは知られている. 1 次元自由ブラウン運動をなす分布族はウィグナーの半円分布族であり $w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ でモード 0 でコンパクトサポートをもつ単峰確率分布となる. したがって自由ブラウン運動もまた全ての時刻で単峰であるといえる.

自由確率論においても自由安定過程, 自由自己分解可能過程, 自由レヴィ過程 (自由無限分解可能過程) などが定義され, 自由ブラウン運動はこれらの確率過程に含まれている. 自由安定過程, 自由自己分解可能過程はすべての時刻で単峰であるという, 古典確率論における安定過程, 自己分解可能過程の単峰性の結果と完全に類似した結果が, Biane, 長谷部, Thorbjørnsen らによって証明された (詳しくは, [1], [5] を参照). しかし長谷部, 佐久間は, μ を自由無限分解可能分布としたとき, μ の自由レヴィ測度がコンパクトサポートをもつならば, μ からなる自由レヴィ過程は十分大な時刻で単峰になるという結果を与えている. すなわち, 古典の場合と合わせると以下のような命題が得られたことになる.

命題 2.8. (**Wolfe**: [11], **長谷部, 佐久間**: [4]) ガウス部分をもたない複合 Poisson 分布 μ で,
(1) μ^{*t} は単峰にならない,
(2) $\Lambda(\mu)^{\boxplus t}$ は単峰になる,
をある十分大な $t > 0$ で同時に満たすようなものが存在する.

(2) の分布 $\Lambda(\mu)$ は自由複合 Poisson 分布と呼ばれる. なお, 写像 Λ は無限分解可能分布全体の集合 ID から自由無限分解可能分布全体の集合 FID への全単射写像であり, $\mu \in ID$ の特性三つ組を (a, η, ν) ($a \geq 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, ν は $\mathbb{R}$ 上レヴィ測度) としたとき, $\Lambda(\mu) \in FID$ は特性三つ組 (a, η, ν) をもつ自由無限分解可能分布を表す. この全単射 $\Lambda : ID \to FID$ を Bercovici-Pata 全単射と呼ぶ. (詳しくは [1] を参照).

これらのことから, 古典確率論におけるレヴィ過程の単峰性に関する結果と正反対の結果となっていることが分かる. そして単峰性という性質が確率論と自由確率論の間にどれだけ違いがあるかということについても興味深いものとなった.

3 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性に関する課題点

第 1, 2 節では, 古典, 自由ブラウン運動の単峰性について触れてきた. 古典, 自由ブラウン運動をそれぞれ単に分布族としてみたとき, それらの初期分布はいずれも 0 でのデルタ分布 δ_0 である. ここで我々は, 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性について研究してきた. 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動とは, 初期分布をデルタ分布でない適当な確率分布 μ に変更するときに得られる古典, 自由レヴィ過程のことをいい, これらの確率過程をなす分布族は古典の場合は $\mu * N(0,t)$, 自由の場合は $\mu \boxplus w_t(dx)$ である. 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性は, もちろん初期分布 μ に依存して変化し, 一般には

すべての時刻で単峰ではなくなる. 例えば $\mu = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$(対称ベルヌーイ分布) と取れば, $\mu * N(0,t)$ は $t \geq 1$ で単峰, $\mu \boxplus w_t(dx)$ は $t \geq 4$ で単峰になる (自由の場合は Figure 1-6). ここで我々の本研究での問題点は, 初期分布がどのようなクラスであれば初期分布つき古典, 自由ブラウン運動は,

- (**All time unimodality**) すべての時刻で単峰になるか,
- (**Large time unimodality**) 十分大な時刻で単峰になるか,
- (**Non-unimodality**) すべての時刻で単峰にならないか,

について考察することである.

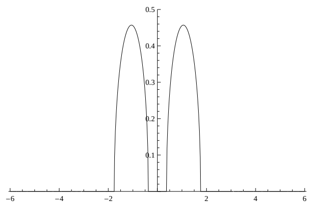

Figure 1: $\mu \boxplus w_{0.25}(dx)$

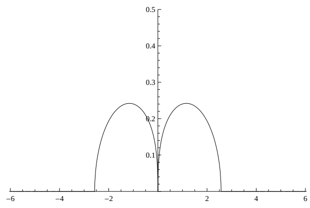

Figure 2: $\mu \boxplus w_1(dx)$

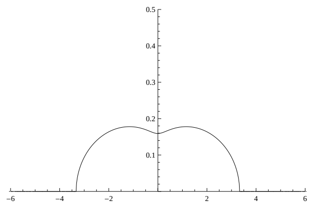

Figure 3: $\mu \boxplus w_2(dx)$

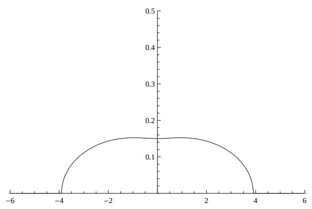

Figure 4: $\mu \boxplus w_3(dx)$

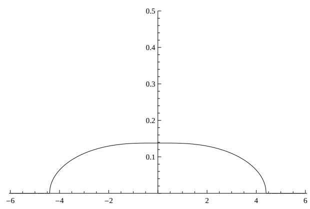

Figure 5: $\mu \boxplus w_4(dx)$

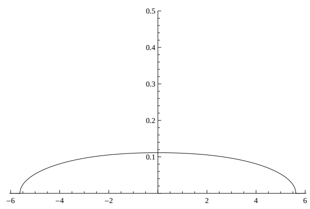

Figure 6: $\mu \boxplus w_7(dx)$

4 Biane の密度関数公式

第 2 節で定義した自由たたみこみによる分布の計算は一般的には困難であり, それを導出するような公式は未だ与えられていない. しかし Biane は特殊な場合として, 一般の $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ とウィグナーの半円分布 $w_t(dx)$ との自由たたみこみ $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数を陰関数表示する公式を与えた. この節ではその公式について解説する. なお詳細は [3] による.

定義 4.1. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度, $t > 0$ とする. ここで以下のような集合を定義する.

$$U_{t,\mu} := \left\{ u \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2} d\mu(x) > \frac{1}{t} \right\}.$$

この集合は $\mathbb{R}$ 上開であることに注意する.

定義 4.2. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度とする. $t > 0$ と $u \in \mathbb{R}$ に対して, 次の方程式:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + v^2} d\mu(x) = \frac{1}{t},$$

をみたす $y \geq 0$ が一意的に定まり, この $v \geq 0$ を $v = v_t(u)$ と表示することにする.

ここで関数 $v_t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $\mathbb{R}$ 上連続であり, 開集合 $U_{t,\mu}$ 上で実解析的となる. また $v_t(u) > 0$ となるための必要十分条件は $u \in U_{t,\mu}$ となることである. このとき Biane は陰関数 v_t の表示を使い, μ に関する $\mu \boxplus w_t(dx)$ の subordination function というものを求めることによって $\mu \boxplus w_t(dx)$ のコーシー変換を計算した. 最後に Stieltjes の逆変換公式によって, 以下のような $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数公式を与えた.

命題 4.3. (**Biane**: [3]) μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度とする．このとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続であり，その確率密度関数を p_t とするとき p_t は以下のように表示される．

$$p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = \frac{v_t(x)}{\pi t} \cdot 1_{\psi_{t,\mu}(\overline{U_{t,\mu}})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

さらに関数 p_t は $\mathbb{R}$ 上連続であり，$\{x \in \mathbb{R} : p_t(x) > 0\}$ 上で実解析的である．ただし $\psi_{t,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下の表示:

$$\psi_{t,\mu}(x) := x + \int_{\mathbb{R}} \frac{x-u}{(x-u)^2 + v_t(x)^2} d\mu(u), \qquad x \in \mathbb{R},$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上同相写像である．

5 研究結果

5.1 初期分布つき自由ブラウン運動に関する研究結果

第 4 節の Biane の密度関数公式に関する結果を用いることで，初期分布つき自由ブラウン運動の単峰性に関する結果を得る．この節では結果の主張および証明の概略を与える．なお詳細は [6] による．

定理 5.1. (**All time unimodality**) μ を対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率測度とするとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての時刻 $t > 0$ で単峰になる．

この定理を証明をするために 2 つの補題を用意する (詳細は [6] を参考)．

補題 5.2. μ を Lebesgue 測度に関して絶対連続な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする．また μ の密度関数 $p(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続関数に拡張され $\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$ 上で実解析的であるとする．このとき μ が単峰であることの必要十分条件は，任意の $a > 0$ に対して方程式 $p(x) = a$ の解 x の個数が 2 個以下であるということである．

確率分布の単峰性の定義によると，単峰確率分布の密度関数は不連続点をもつことがあり得る．さらには $\mathbb{R}$ のある区間で平坦になっていることもあり得る．補題 5.2 ではこういった状態が起こらない場合に関する単峰確率分布の条件を与えていることになる．

補題 5.3. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度，$t > 0$ とする．もし任意の $R > 0$ に対して，方程式

$$\Xi_R(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + R^2} d\mu(u) = \frac{1}{t} \tag{5.1}$$

の解 x の個数が 2 個以下であるならば $\mu \boxplus w_t(dx)$ は単峰である．

証明．命題 4.3 の $\psi_{t,\mu}$ が $\mathbb{R}$ の同相写像であることと補題 5.2 により，任意の $a > 0$ に対して方程式 $p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = a$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示せばよい．ここで $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して，値 $v_t(x)$ は正のとき方程式 (5.1) の一意的な解であったので，

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : a = \frac{v_t(x)}{\pi t} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + (\pi a t)^2} d\mu(u) = \frac{1}{t} \right\}, \tag{5.2}$$

が成立する．したがって今の仮定から (5.2) の右辺の解空間の元の個数は 2 個以下である．ゆえに方程式 $p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = a$ の解 x の個数は 2 個以下であることが示された． □

定理 *5.1* の証明．μ を対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする．補題 5.3 より，任意の $R > 0$ と $t > 0$ に対して方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示せばよい．任意に $R > 0$ と $t > 0$ をとり，方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ を考える．ところでパラメーター $R > 0$ の対称コーシー分布を $C_R(dx)$ と書くことにすれば，μ とのたたみこみ $\mu * C_R(dx)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続で，その密度関数は $\mathbb{R}$ 上連続かつ正の部分で実解析的である．さらに $C_R(dx)$ もまた対称かつ単峰なので $\mu * C_R(dx)$ は単峰であり

$$\frac{d(\mu * C_R)}{dx}(x) = \frac{R}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + R^2} d\mu(u) = \frac{R}{\pi} \cdot \Xi_R(x) = \frac{R}{\pi t}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

となるので，補題 5.2 より方程式 (5.3) の解 x の個数は 2 個以下であることがわかる．関数 $\Xi_R(x)$ は関数 $\frac{d(\mu * C_R)}{dx}(x)$ の定数倍に過ぎないので，方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数も 2 個以下であることが言える． □

つぎに Large time unimodality に関する結果について述べていく．なお証明では簡単な計算は全て省き, 概要のみを述べることにする．

定理 5.4. (**Large time unimodality**) μ をコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とし, D_μ を μ のサポートの長さとする．このとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ は $t \geq 4D_\mu^2$ で単峰になる．

証明. μ をコンパクトサポートを持つ確率測度として, $t \geq 4D_\mu^2$ のとき, 任意の $R > 0$ に対して $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示す．デルタ測度で自由たたみこみをとれば分布の密度関数は平行移動するので, はじめから μ の台は $\left[-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right]$ に含まれると仮定してよい．また $t \geq 4D_\mu^2$ として $t > 0$ をとっておく いま明らかに, 全ての $x < -\frac{D_\mu}{2}$ に対して $\Xi'_R(x) > 0$, 全ての $x > \frac{D_\mu}{2}$ に対して $\Xi'_R(x) < 0$ であり Ξ'_R は $\mathbb{R}$ 上連続である．もし $0 < R < \sqrt{3}D_\mu$ ならば, 全ての $x \in \left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ に対して $\Xi_R(x) > \frac{1}{t}$ となるため, 方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数は 2 個以下であることが分かる．つぎに $R \geq \sqrt{3}D_\mu$ ならば, 全ての $x \in \left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ に対して $\Xi''_R(x) < 0$ が成立する．ゆえに中間値の定理から Ξ_R は $\left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ 上に唯一つの極大点をもつ．これは方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示している．したがって $t \geq 4D_\mu^2$ のとき, 任意の $R > 0$ に対して方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることが示された． □

逆にコンパクトサポートをもたない初期分布で, それが付いた自由ブラウン運動が全ての時刻で単峰とならないような例も構成した．ここでは構成の方法のみについて述べ, 証明は行わないことにする．

定理 5.5. (**Non-unimodality**) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を可測関数とする．このとき,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) < \infty,$$

となるような $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ で単峰にならないようなものが存在する．

構成の方法. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を可測関数とする．実数列 $\{a_n\}_n$ を狭義単調増加で $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \infty$ となるようにとる．さらに実数列 $\{w_n\}_n$ を以下のようにして定義する:

$$w_n := \frac{c}{n^2 \max\{f(a_n), 1\}} > 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ここで $c > 0$ は正規化する定数とする．すなわち $\sum_{n=1}^\infty w_n = 1$ とするような正定数とする．これらの実数列を使って構成した $\mathbb{R}$ 上確率測度 $\mu := \sum_{n=1}^\infty w_n \delta_{a_n}$ はコンパクトサポートをもたず, $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ で単峰にならないことがいえる．その証明は [6] による． □

以上の結果から第 3 節で挙げた問題に対する一つの解答が得られたことになる． 最後に All time unimodality に関する結果において, 次のような問題が自然に出てくることに触れておく．

問題 5.6. 定理 5.1 において μ の対称性の仮定は除けるのだろうか．

結論から言うと, この問いに関する答えは"No"である．このことについては自由強単峰性という概念と深く関わるので, 第 6 節の"自由強単峰性"で触れることにする．

5.2 初期分布つき古典ブラウン運動に関する研究結果

つぎに初期分布つき古典ブラウン運動の単峰性に関する研究結果について述べる．まず All time unimodality についてだが, 初期分布 μ として単峰なものをとれば, Ibragimov の結果により, 正規分布 $N(0, t)$ はすべての $t > 0$ で強単峰であるので $\mu * N(0, t)$ はすべての $t > 0$ で単峰になることがわかる．我々は初期分布つき古典ブラウン運動の単峰性 (Large time unimodality 及び Non-unimodality) に関して以下のような結果を得た．証明は [6] による．

定理 5.7. (**Large time unimodality**) μ を次の性質をもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とする: ある $A > 0$ があって,

$$\alpha := \int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^2}\mu(dx) < \infty.$$

このとき $\mu * N(0, t)$ は $t \geq \frac{36\log(2\alpha)}{A}$ のとき単峰になる．

定理 5.8. (**Non-unimodality**) 任意の $A>0$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^p}\mu(dx)<\infty,\ \ (0<p<2),\ \text{and}\ \int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^2}\mu(dx)=\infty,$$

となるような $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * N(0,t)$ はすべての $t>0$ で単峰にならないものが存在する.

5.3　初期分布つき指数 1/2 と 1 の安定過程の単峰性

本題ではないが, 指数 1/2 の片側安定過程と指数 1 の (狭義) 安定過程に関しても, 特定の初期分布をつけることで十分大時刻で単峰になること (Large time unimodality) と, 全ての時刻で単峰にならない例 (Non-unimodality) を構成したので報告する. これらの証明も [6] による. はじめに指数 1 の狭義安定分布 (またはコーシー分布) を以下の記号を使って定義する.

$$C_t(dx):=\frac{t}{\pi(x^2+t^2)}\cdot 1_{\mathbb{R}}(x)dx,\qquad t>0,$$

ここで分布族 $C_t(dx)$ からなるレヴィ過程を指数 1 の (狭義) 安定過程, またはコーシー過程といい, 初期分布 μ つきコーシー過程を分布族 $\mu * C_t(dx)$ からなるレヴィ過程と定義する. このとき初期分布つきコーシー過程の単峰性に関して以下の結果が得られた. All time unimodality に関しては, 単峰性の一般論から, μ が対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率分布であれば $\mu * C_t(dx)$ は全ての $t>0$ で単峰になることが言える.

定理 5.9. (**Large time unimodality**) μ を絶対 3 次モーメントが有限な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする, すなわち,

$$\beta:=\int_{\mathbb{R}}|x|^3\mu(dx)<\infty$$

をみたすとする. このとき, $\mu * C_t(dx)$ は $t\geq 20\beta^{1/3}$ のとき単峰になる.

さらに初期分布つき古典ブラウン運動の結果と類似した結果も得られた.

定理 5.10. (**Non-unimodality**) 以下の性質:

$$\int_{\mathbb{R}}|x|^p\mu(dx)<\infty,\ \ (0<p<3),\ \text{and}\ \int_{\mathbb{R}}|x|^3\mu(dx)=\infty,$$

をみたす $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * C_t(dx)$ がすべての時刻で単峰にならないものが存在する.

説明は省略したが, コーシー変換の計算によって, 任意の $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ に対して,

$$\mu * C_t(dx)=\mu\boxplus C_t(dx),$$

が成立し, さらに指数 1 の自由狭義安定分布 (自由コーシー分布) は指数 1 の狭義安定分布 (コーシー分布) と一致する (詳しくは [1] を参照). したがって, 以下の定理も同時に得る.

定理 5.11. 初期分布つき自由コーシー過程に関しても, 定理 5.9, 定理 5.10 が成立する.

次に指数 1/2 の片側安定分布 (またはレヴィ分布) を以下の記号を使って定義する.

$$L_t(dx):=\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{t^2}{2x}}}{x^{3/2}}\cdot 1_{(0,\infty)}(x)dx,$$

分布族 $L_t(dx)$ からなるレヴィ過程を指数 1/2 の片側安定過程, または単に片側安定過程といい, 初期分布 μ つき片側安定過程を分布族 $\mu * L_t(dx)$ からなるレヴィ過程と定義する. このとき初期分布つき片側安定過程に関する単峰性について, 以下のような結果を得た.

定理 5.12. (**Large time unimodality**) μ をコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とし, D_μ を μ の台の長さとする. このとき $\mu * L_t$ は $t\geq(90/4)^{1/4}D_\mu^{1/2}$ のとき単峰になる.

定理 5.13. (**Non-unimodality**) 以下の性質:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx) < \infty, \ \ (0 < p < 5/2), \text{ and } \int_{\mathbb{R}} |x|^{5/2} \mu(dx) = \infty,$$

をみたす $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * L_t(dx)$ がすべての時刻で単峰にならないものが存在する.

初期分布つき片側安定過程の単峰性に関しては, 定理 5.9, 定理 5.10 のように絶対値モーメントの挙動で与えられてはいないが, 定理 5.12 の初期分布に関する仮定を絶対 5/2 次モーメント有限な初期分布という仮定に変更にしても成立すると予想される. 最後に, 指数 1/2 の自由片側安定分布は,

$$fL_t(dx) := \frac{\sqrt{4x - t}}{2\pi t x^2} \cdot 1_{[t/4, \infty)}(x) dx, \qquad t > 0,$$

によって与えられ, 分布族 $fL_t(dx)$ からなる自由レヴィ過程 (自由片側安定過程) も定義されるが, 初期分布つき自由片側安定過程に関しては, その密度関数もまだ与えられておらず, どのような初期分布のときに単峰になったりならなかったりするのかということはまだ何もわかっていない. 当然, より一般に初期分布付き古典/自由安定過程やレヴィ過程などが考えられるが, これらの単峰性に関してもまだよくわかっていない.

6 自由強単峰性

最後に自由強単峰性について触れ, 今回得た結果について報告する. 確率分布 μ が自由強単峰であるとは, 任意の単峰確率分布 ν に対して, $\mu \boxplus \nu$ が単峰になることである. たたみこみによらずに定義される単峰性と違い, 強単峰性はたたみこみによって定義されたので, 自由たたみこみによる強単峰性のようなものも (天下り的には) 定義できる. しかし Ibragimov によって得られた強単峰性の特徴付けのように, 自由強単峰性にはまだ特徴付けのようなものは存在していない. それどころかデルタ測度以外に自由強単峰となるような例すら未だ見つかっておらず, このような性質を満たす $\mathbb{R}$ 上確率分布の発見, および特徴付けは今後の課題になる. 少なくとも現時点では自由強単峰性に関して以下のような結果を得た.

定理 6.1. ウィグナーの半円分布は自由強単峰ではない. さらに一般に, 分散が有限である確率分布はすべて自由強単峰ではない.

前半の証明. 後半の証明には自由中心極限定理などを用いるため, ここでは証明省略し, 前半の証明のみ行う. Ibragimov の結果 (命題 1.3) から対称コーシー分布 $C_1(dx)$ は強単峰でないため, ある単峰確率測度 μ が存在して $\mu * C_1(dx)$ は単峰でない. したがって補題 5.2 からある $t > 0$ が存在して, 方程式:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + 1} d\mu(u) = \pi \cdot \frac{d(\mu * C_1)}{dx}(x) = \frac{1}{t},$$

の異なる解 x の個数が少なくとも 3 個以上あることがわかる. 簡単のためこの方程式の異なる解の個数を 3 個とし, それぞれの異なる解を $x = x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ としておく. したがって関数 v_t の定義から, $i = 1, 2, 3$ において $v_t(x_i) = 1$ となることがいえる. したがって p_t を $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数とすれば, $i = 1, 2, 3$ において $p_t(\psi_{t,\mu}(x_i)) = \frac{1}{\pi t}$ を意味しているので, $\mu \boxplus w_t(dx)$ は単峰ではない. $w_t(dx)$ の時刻 $t > 0$ のスケールを変えれば, 全て $t > 0$ でウィグナーの半円分布 $w_t(dx)$ は自由強単峰でないことがわかる. □

この定理から自由ブラウン運動は全ての時刻で自由強単峰でないことがわかる. 言い方を変えれば, 単峰確率分布 μ が存在して $\mu \boxplus w_t(dx)$ がある $t > 0$ で単峰でないことがわかった. これは問題 5.6 の解答になっていることがわかる. ところで古典ブラウン運動は Ibragimov の結果により全ての時刻で強単峰となるので, このことから強単峰性と自由強単峰性の間には大きな違いがあることがわかる.

最後に, 自由たたみこみと単峰性に関する問題を一つ挙げる. まず古典確率論では μ, ν が対称かつ単峰であれば $\mu * \nu$ もまた対称かつ単峰であったことを思い出す. 定理 5.1 によると, 対称単峰確率分布とウィグナーの半円分布 (対称かつ単峰である) の自由たたみこみは単峰であることがわかっているが, より一般的なことは解っていない. つまり, このことは以下の問題として定式化される.

問題 6.2. μ, ν を対称かつ単峰な確率分布とするとき, $\mu \boxplus \nu$ が単峰であるか.

謝辞

本研究は, 科研費若手研究 (B)15K17549 および，独立行政法人日本学術振興会と MAEDI との二国間交流事業共同研究による支援を受けたものである.

参考文献

[1] H. Bercovici and V. Pata, with an appendix by P. Biane, Stable laws and domains of attraction in free probability theory, Annals of Mathematics, **149** (1999), 1023-1060.

[2] H. Bercovici and D. V. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, Indiana University Mathematics Journal **42** (1993), 733-773.

[3] P. Biane, On the free convolution with a semi-circular distribution, Indiana, Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 705-718.

[4] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 2, 916-936.

[5] T. Hasebe and S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws, J. Theoret. Probab. **29** (2016), no. 3, 922-940.

[6] T. Hasebe and Y. Ueda, Large time unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions, preprint, arXiv:1710.08240.

[7] I. A. Ibragimov, On the composition of unimodal distributions, TPA **1** (1956), 255-260.

[8] A. Nica and R. Speicher, Lectures on the Combinatorics of Free probability, 2006, London Mathematical Society Lecture Note Series.

[9] K. Sato, Lévy processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge Studies in Advanced Math. **68**. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR1739520.

[10] T. Watanabe, On the strong unimodality of Lévy processes, Nagoya Math. J. Vol. **121** (1991), 195-199.

[11] S. J. Wolfe, On the unimodality of infinitely divisible distribution functions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **45** (1978), 329-335.

[12] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L, Ann. Probab. **6**, 523–531 (1978).