Young tableau を用いた rooted tree の数え上げ

石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA)
お茶の水女子大学 理学部数学科

概 要

n 頂点のラベル付き根付き木の個数はケイリーの公式により n^{n-1} で与えられることが知られているが、ラベルのない根付き木の個数を与える明示公式は未だ得られていない。本稿では、“ある条件”を満たす根付き木の個数を与える明示公式を Young tableau の数え上げを用いて求める。

1 導入

根つき木は計算機科学において重要なデータ構造である．特に二分木は基本的なデータ構造として有名だが，AI の発達や IoT の普及などにより情報化が進む現代では，より複雑なデータ構造が必要とされている．また，データ構造におけるアルゴリズムを考える上で，その構造の数学的特徴を捉えることは必要不可欠である．既に，根つき木やラベルつき根つき木の数え上げ母関数の関係式は得られているが，これらは明示的ではない [1] [2]．本稿で述べる根つき木“finely-bounded tree”は，その木にセル内の数が重複しない Young tableau の組が対応するように定義することで数え上げ明示公式を導出した．さらに，セル内の数の重複を許した場合にも同様に数え上げ公式が得られれば，一般の根つき木の数え上げ明示公式が得られることが期待される．

2 準備

rooted tree (根つき木) とは，唯一つ区別される頂点をもつ tree (木グラフ) のことである．区別される頂点を **root (根)** と言い，本稿では木と言えば rooted tree を指すこととする．

木の数え上げは“グラフの同型”による同値類の数え上げである．木の同型の定義は以下の通りである:

Definition 1. (根つき木の同型) $T = (V, E),\ T' = (V', E')$ はそれぞれ $R \in V,\ R' \in V'$ を根とする根付き木とする．このとき，

$$T, T' \text{は同型} \underset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}\, \phi : V \to V' : \text{bij s.t.} \{u, v\} \in E \Rightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E',\ \phi(R) = R'$$

この定義は以下のように捉えることができる:

Lemma 1. $T = (V, E),\ T' = (V', E')$ はそれぞれ $R \in V,\ R' \in V'$ を根とする根付き木とする．また，

$$C_T = \{T \text{ において}, R \text{ に隣接する点を根とし}, R \text{ と } R \text{ に接続している辺を除去したグラフ}\}$$

とおく．このとき，

$$T, T' \text{は同型} \iff for\ {}^{\forall} c \in C_T\ {}^{\exists}\varphi : C_T \to C_{T'} : \text{bij s.t. } c \simeq \varphi(c)$$

ここで，後に用いる整数の分割，Young diagram，Young tableau の定義を述べておく．

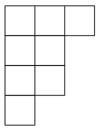
Definition 2. (整数の分割) ある整数 n に対し，$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)$ $(\lambda_i \in \mathbb{Z})$ が以下の 2 つの条件を満たすとき，λ は n の**分割 (partition)** であるという．

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$

また，このとき $\lambda \vdash n$ と書き，k を分割 λ の**長さ**という．

$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k) \vdash n$ のとき，$\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) = (i^{m_i})$ $(m_i = \#\{j|\lambda_j = i\})$ とも表す．ここで，各 i に対し m_i が 0 または 1 のとき，λ は **strict partition** という．

Definition 3. (Young diagram, Young tableau) $\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k) \vdash n$ に対し，$i = 1, 2, \cdots k$ 行目に λ_i 個のセルを左端を揃えて並べた図形を **Young diagram** という．また，各セルに数を入れたものを **Young tableau** という．

Example 1. $\lambda = (3221) = 1^1 2^2 3^1 \vdash \iff$ 

3 主結果

$T = (V, E)$ を木とする．$v \in V$ について，

$$d(v)$$

を根から頂点 v まで経由する辺の最少数とし，これを v の**深さ**という．また，

$$\max\{d(v)|v \in V\}$$

を T の**高さ**という．T の高さを h とし，$i = 1, 2, \cdots, h$ に対し，

$$\begin{cases} V_i = \{v \in V | d(v) = i\} \\ E(V_{i-1}, V_i) = \{\{u, v\} \in E | u \in V_{i-1}, v \in V_i\} \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$T_i = (V_{i-1} \cup V_i, E(V_{i-1}, V_i))$$

を V_{i-1} の頂点全てを根とする根つき木の組とする．また，接続する辺がただ 1 つの頂点を**葉**という．ここで，本稿にて数え上げる対象は以下の木である：

Definition 4. (finely-bounded tree) 高さ h の根つき木 T が以下の条件を満たすとき，T を **finely bounded tree** という*:*

(1) T の任意の葉 v に対し $d(v) = h$,

(2) T_h の任意の 2 つの根つき木は互いに非同型.

特に T が有限グラフであり，正整数列 $\underline{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ に対し

$$|V_i| = r_i \quad (i = 1, 2, \cdots, h)$$

となるとき，T を $\underline{r}$−**finely bounded tree** という.

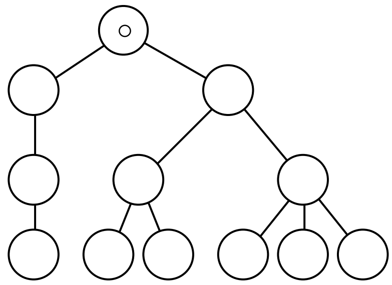


Figure 1: 根つき木 T

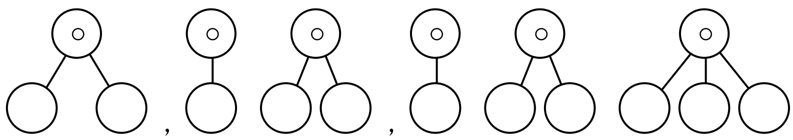


Figure 2: T_1, T_2, T_3

Figure 1 の木 T の高さは 3 で，任意の葉は V_3 に属する．さらに，T_3 は 3 つの互いに非同型な根つき木からなる (Figure 2)．よって，これは (2,3,6)-finely-bounded tree である．

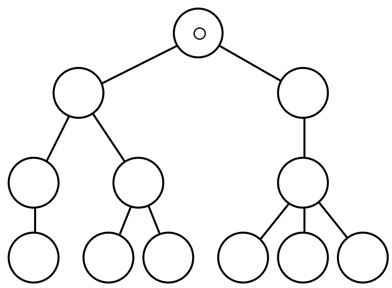


Figure 3: Figure 1 と非同型な根つき木 T'

それでは，表題にある Young tableau と木の関係を見ていく．T_i は高さ 1 の根つき木の組である．その各根つき木の葉の個数を非増加に並べることにより，T_i には $|V_i|$ の長さ $|V_{i-1}|$ の分割

$$\lambda^{(i)}$$

が対応する．これより，T に対応する h 個の分割の列

$$\lambda(T) = (\lambda^{(i)})_{i=1}^{h}$$

が得られる．例えば Figure 1 の木 T について，T_1, T_2, T_3 は Figure 2 のようになる．これは分割列 $\lambda(T) = (2, 21, 321)$ に対応する．$\lambda(T)$ を Young diagram を用いて表すと，

$$\lambda(T) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

となる．この λ を，高さ h の木の集合から h 個の Young diagram の組の集合への写像と見ると，この写像は全射であるが単射ではない．

これは，Figure 1 の木 T に対応する分割列 $\lambda(T)$ は Figure 3 の木 T' に対応する分割列でもあることからも明らかである．以降，数え上げを行うにあたり，finely-bounded tree 全体の集合と“ある条件”を満たす Young tableaux の列全体の集合との間の全単射を構成することが目標である．今，木 T を

$$\bigcup_{i=1}^{h} T_i = T$$

と表記することにより，根つき木における“filtration”を以下のように定義できる．

Definition 5. (根つき木の filtration) T を高さ h の根つき木とする．$\mathcal{F}_i$ を

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{h-i}^{h} T_i$$

とおく．このとき，$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots \mathcal{F}_h$ に関する包含列

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_h$$

を T の **filtration** と呼ぶ．

我々は木に Young tableaux の組を対応させるのだが，その手続きを Figure 1 の例を用いて説明する．

Figure 1 の木 T について，

(1) $\lambda(T) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$ を考える．また，Figure 2 の根つき木を左から $t_1, t_2, \cdots t_6$ とおくと，T_1, T_2, T_3 はそれぞれ

$$T_1 = (t_1), T_2 = (t_2, t_3), T_3 = (t_4, t_5, t_6)$$

となる．

(2) $\mathcal{F}_1$ は $\lambda^{(3)}$ に対応しており，T_3 の要素 t_4, t_5, t_6 はそれぞれ λ_3 の第 3,2,1 行に対応する．また，各 i 行のセルは $C_{t_{7-i}}$ の各要素に対応する．今，$C_{\mathcal{F}_1} = V_3$ の任意の 2 つのグラフは互いに同型であるから，$\lambda^{(3)}$ の全てのセルには同じ数を入れる:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

(3) $\mathcal{F}_2$ は $\lambda^{(2)}$ に対応しており，T_2 の要素 t_2, t_3 はそれぞれ $\lambda^{(2)}$ の第2,1行に対応している．Lemma 1 より，$C_{\mathcal{F}_2}$ の任意の 2 つの木は非同型であるから，$\lambda^{(2)}$ の各セルにはそれぞれ相異なる数を入れる:

$$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}.$$

(4) $\mathcal{F}_3$ は $\lambda^{(1)}$ に対応しており，t_1 は第 1 行に対応している．Lemma 1 より，$C_{\mathcal{F}_3}$ の任意の 2 つの木は非同型であるから，$\lambda^{(1)}$ の各セルにはそれぞれ相異なる数を入れる:

$$\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}.$$

(5) 以上より，根つき木 T に対応する Young tableaux の組 $\Lambda_{(T)}$ は以下のようになる:

$$\Lambda_{(T)} = \left(\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau} \right).$$

このように定めた Young tableaux に以下の操作を施しても，それらに対応する木は元の木と同型な木であることがわかる:

- セルの個数が等しい任意の 2 つの行の入れ替え．
- 同行内の任意の 2 つのセルの入れ替え．
- セル内の数が等しい任意の 2 つのセルの入れ替え．

逆に，セル内の数が互いに異なる異行内の 2 つのセルの入れ替えを施せば，その Young tableaux に対応する木は元の木と非同型な木であると言える．例えば，上で定めた Young tableaux の組 $\Lambda_{(T)}$ に対し，Figure 3 の木 T' に対応する Young tableaux の組 $\Lambda_{(T')}$ は

$$\Lambda_{(T')} = \left(\begin{ytableau} 2 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau} \right) \simeq \left(\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau} \right)$$

となる．ここで $\Lambda_{(T)}, \Lambda_{(T')}$ を比較すると，$\Lambda_{(T')}$ の第二成分は $\Lambda_{(T)}$ の第二成分の 2 と 3 を入れ替えたものである．2,3 は互いに異なる行に属しており，かつ $2 \neq 3$ であるから，T と T' は Lemma 1 から非同型であることがわかる．これらの性質を用いて，正整数列 $\underline{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ に対し，$\underline{r}$-finely bounded tree の数え上げを考える．

$$\begin{cases} \mathrm{Tab}_{r_i} = \{r_i \text{次の Young tableaux}\} \\ \underline{r}\text{−Tab} = \{(s_1, s_2, \cdots, s_h) | s_i \in \mathrm{Tab}_{r_i}, i = 1, 2, \cdots, h\} \end{cases}$$

とすれば，上の 3 つの操作により生成される $\underline{r}$-Tab 上の同値関係を $\sim$ で表せば，1 対 1 対応

$$\{\underline{r} - \text{finely bounded trees}\}/\text{同型} \leftrightarrow \underline{r} - \mathrm{Tab}/\sim$$

が得られる．これにより，以下で定める “tree tableau” は $\underline{r}$-Tab / $\sim$ の代表系の元となり，この定義は木に対応する Young tableau の標準的な取り方を与えている．

Definition 6. (tree tableau) Y を Young tableau，$Y(i, j)$ を Y の i 行 j 列のセル内の数とする．Y が以下の条件を満たすとき，Y は **tree tableau** であるという．

- 任意の i に対し，$Y(i,j) \leq Y(i,j+1)$.
- $i, i+1$ 行内のセルの個数が等しいとき，$Y(i,1) \leq Y(i+1,1)$.

以上の議論から，木の数え上げは tree tableaux の組の数え上げに帰着されることがわかる．これにより，以下の $\underline{r}$-finely bounded tree の数え上げ明示公式が得られた．

Theorem 1. $SP_k(n)$ を長さ k の n の strict partitions の集合，$P_k(n)$ を長さ k の n の分割の集合とする．高さ h，正整数列 $\underline{r} = (r_i)_{i=1}^h$ が与えられた $\underline{r}$-finely bounded tree の総数は以下で与えられる．

$$|SP_{r_{h-1}}(r_h)| \prod_{k=1}^{h-1} \sum_{\lambda \in P_{r_{k-1}}(r_k)} \frac{1}{m_\lambda!} \binom{r_k}{\lambda}.$$

ただし，$m_\lambda! = m_1! m_2! \cdots$，$\binom{r_k}{\lambda}$ は多項係数である．

Proof. finely-bounded の定義より，T_h に対応する分割は strict partition である．また，$C_{\mathcal{F}_1} = V_h$ で，任意の 2 つの木 (頂点) は明らかに同型であるから，$\mathcal{F}_1$ に対応する tree tableau は，その strict partition に対応する Young diagram の全てのセルに同じ数を入れたものである．従って，$\mathcal{F}_1$ の tree tableau は $|SP_{r_{h-1}}(r_h)|$ 通り存在する．

$C_{\mathcal{F}_2}$ ($= \mathcal{F}_1 = T_h$) の任意の 2 つの根つき木は， finely-bounded tree の定義より互いに非同型である．よって，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau 内の数は全て異なる．これより，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau は

$$\sum_{\lambda \in P_{r_{h-2}}(r_{h-1})} \frac{1}{m_\lambda!} \binom{r_{h-1}}{\lambda}.$$

通り存在する．

また，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau 内の数が全て異なることから，$C_{\mathcal{F}_2}$ の任意の 2 つの根つき木は互いに非同型である．よって，$\mathcal{F}_3$ に対応する tree tableau 内の数も全て異なる．

以降同様に議論できるので，各 $\mathcal{F}_k$ に対応する tree tableau の総数の積を取れば，求める $\underline{r}$-finely bounded tree の総数となる． □

参考文献

[1] 田澤新成，グラフの数え上げ　母関数を礎にして，共立出版, 2014.

[2] M.Aigner, Combinatorial Theory, Springer-Verlag, 1979.