

粘性項を変形した流体方程式に対する大域解の有界性と Energy Cascade の考察

岸本 展 (Kishimoto Nobu)* , 斉木 吉隆 (Saiki Yoshitaka)[†] ,
中井 拳吾 (Nakai Kengo)[‡] , 米田 剛 (Yoneda Tsuyoshi)[§]

1 導入

我々は, Navier–Stokes 方程式の粘性項を一般化した次の方程式を考察する.

$$\text{GNS} \begin{cases} \partial_t v + \nu P_{>\Lambda}(-\Delta)^{A/2}v + (v \cdot \nabla)v + \nabla\pi = 0, & \nabla \cdot v = 0, & \mathbb{T}^3 \times (0, \infty), \\ v|_{t=0} = v_0 \quad \text{with } \nabla \cdot v_0 = 0, & & \mathbb{T}^3. \end{cases}$$

ただし, $\nu > 0$: 動粘性係数, $\pi(x, t)$: 圧力, $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$: 速度ベクトルとする. また, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\Lambda \in [1, \infty)$ に対して, $P_{>\Lambda} := \mathcal{F}^{-1}\chi_{\{|\xi|>\Lambda\}}\mathcal{F}$, $(-\Delta)^{A/2} := \mathcal{F}^{-1}|\xi|^A\mathcal{F}$ と定義する. ただし, χ を定義関数, \mathcal{F} をフーリエ変換とした. $P_{>\Lambda}$ は波数空間上でのカットオフ関数に相当する. 特に, $\Lambda = 0$ かつ $A = 2$ の場合は通常の Navier–Stokes 方程式に相当する. 我々は $A > 2$ の場合, つまり超粘性の場合を考える. また, $\Lambda \in (1, \infty)$ の場合を考える. このように一部の周波数に対して粘性の効果が入るように一般化した粘性を部分粘性と呼ぶこととする.

この方程式に関して, Lions [4] は, $A \geq 5/2$, $\Lambda = 0$, かつ $s > A$ に対して $v_0 \in H^s$ のとき, 時間大域的な古典解が存在することを証明した. また, Elgindi, Hu と Šverák [2] らは, 2次元の場合に関して一部の周波数に対して粘性を入れた場合についての解の一意性を証明した.

一方で Navier–Stokes 方程式は, 乱流を含めた流体運動を記述できることが知られている. 特に, 3次元乱流では外力によってエネルギーが注入されると, 流体要素がねじられたり引き伸ばされたりすることによってより小さなスケールの運動を引き起こす. つまり, 注入されたエネルギーが小さなスケールに遷移することが知られている [[5]-pp.66]. このエネルギーが遷移する現象はエネルギーカスケードと呼ばれている. そして, ある程度小さいスケールまでエネルギーが遷移すると, 最終的に粘性などの効果によりそのエネルギーが消費される.

また, 波数 $k \in \mathbb{N}$ に関するエネルギー関数 $E(k, t)$ を以下で定義する.

$$E(k, t) := \frac{1}{2} \int_{D_k} |\mathcal{F}[v](K, t)|^2 dK.$$

ただし, 積分範囲は $D_k := \{K \in \mathbb{R}^3 | k - 0.5 \leq |K| < k + 0.5\}$ と定義する. このとき実際の十分に発達した乱流について, エネルギーを注入するスケールと消費する領域の間 (慣性領域と呼ぶ) では粘性に依存しないという仮定 [3] と次元解析などを用いると次のべき則が導かれることが知られている.

$$E(k, t) \approx Ck^{-5/3} \quad \forall t > 0.$$

*博 (理) 京都大学 数理解析研究所 (〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町)

[†]博 (数理学) 一橋大学 商学研究科 (〒 186-8601 東京都国立市中 2-1)

[‡]東京大学大学院数理学研究科 (〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1, E-mail: knakai@ms.u-tokyo.ac.jp)

[§]博 (数理学) 東京大学大学院数理学研究科 (〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1)

ただし, C は k に依存しない定数とする. このべき則はコルモゴロフの $5/3$ 則と呼ばれている [3]. 実際の乱流や Navier–Stokes 方程式の直接数値計算によって得られた解に対してエネルギースペクトルが $5/3$ 則に従うことが確認されている [6].

エネルギーカスケード現象は任意の速度場の時間発展の過程で観測されるわけではない. 例えば, $\nu = 0$ とした Euler 方程式の定常解として知られている Arnold–Beltrami–Childress Flow (ABC-Flow) [1] は GNS の定常解である. つまり, ABC-Flow を初期値とする速度場を時間発展させたときは, エネルギーカスケードしない.

一方でコルモゴロフの仮説において慣性領域での粘性の効果を無視することなどを持ちいて $5/3$ 則を導いていた. しかし, 実際 Navier–Stokes 方程式は慣性領域を含めてすべての波数に粘性の効果が入っている. そこで我々はエネルギーカスケードの $5/3$ 乗則の根源を解明する手がかりを探るために, まずは慣性領域の粘性の効果を除去した GNS について数学解析として大域解の存在証明をした. また, 数値計算を用いてまずはエネルギー関数 $E(k, t)$ を考察した.

2 数学結果

次のように $A = 5/2$ かつ $\Lambda \in [1, \infty)$ の場合について, 任意の初期値に対する時間大域的な一様有界性を証明した.

定理. $A = 5/2$, $\Lambda \in [1, \infty)$ とする. 任意の $v_0 \in H^1$ に対して, 積分方程式の解 v が次の関数クラスにおいて一意に時間大域的に存在する:

$$C_b([0, \infty); H^1) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H^{9/4}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{T}^3),$$

ただし, C_b は有界な連続関数の空間を表す. また, 次の不等式が成立する.

$$\|v\|_{L^\infty(0, \infty; H^1)}^2 \leq C \left(\|v_0\|_{H^1}^2 + \Lambda^2 \|v_0\|_{L^2}^2 + \Lambda^{\frac{9}{4}} \|v_0\|_{L^2}^3 \right) e^{C \|v_0\|_{L^2}^2},$$

ただし, $C > 0$ は Λ, v_0 とは独立した値とする. さらに, $\|P_{>\Lambda} v(t)\|_{H^1} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成立する.

3 数値計算結果

GNS に対する直接数値計算で得られた速度場におけるエネルギースペクトルを考察する. 直接数値計算では, 境界を 3 次元周期境界とし, 切断波数は $(269 * 2 + 1)^3$ としてフーリエスペクトル法を用いる. ただし, 離散フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) というアルゴリズムを利用するが, FFT により現れるエイリアスエラーは $3/2$ ルールに基づいて除去する. また, 4 次精度の Runge–Kutta 法を基本的には $1/800$ 秒刻みで時間発展をさせる. ただし, エネルギーの総和 ($\sum E(k, t)$) が発散する傾向にある場合は適宜時間刻みを細かくするアダプティブメッシュを用いる. 初期条件は適当ななめらかな速度場とし, 定常乱流を得るために $|K| < 2$ を満たすいくつかの波数 $K \in \mathbb{N}^3$ におけるフーリエ係数が下記の等式が整理するように外力を入れる.

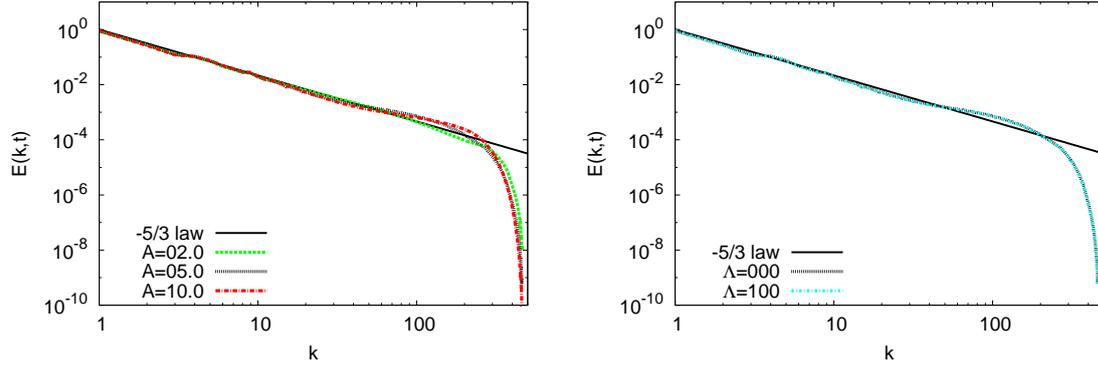
$$\mathcal{F}_{[v]}(K, t) = \mathcal{F}_{[v]}(K, 0) \quad (|K| < 2).$$

この直接数値計算の方法を用いて, 次の表のように $A = 2, 5, 10$ かつ $\Lambda = 0$ の場合と $A = 5$ かつ $\Lambda = 100$ の場合について $E(k, t)$ を計算をした.

	$\Delta^{A/2}$	Λ	ν	viscosity term
☒ 1(a)	$\Delta^{2/2}$	0	0.15×10^{-3}	usual Navier–Stokes
☒ 1(a)(b)	$\Delta^{5/2}$	0	0.40×10^{-10}	hyperviscosity
☒ 1(b)	$\Delta^{5/2}$	100	0.40×10^{-10}	partial hyperviscosity
☒ 1(a)	$\Delta^{10/2}$	0	0.80×10^{-22}	hyperviscosity

表 1: 直接数値計算するパラメータの値

ただし, $E(k, t)$ の計算は渦レイノルズ数やエネルギー散逸率などの変動がほとんどなくなる $t = 10$ から $t = 30$ の値の時間平均値を取ることにする.



(a) $A = 2, 5, 10$ の場合の $E(k, t)$ をプロットした. ただし, $\Lambda = 0$ は固定した. (b) $\Lambda = 0, 100$ の場合の $E(k, t)$ をプロットした. ただし, $A = 5$ は固定した.

図 1: 各パラメータ A, Λ に対するエネルギースペクトル $E(k, t)$ を両対数メモリでプロットした. ただし, 各エネルギースペクトルは $t = 10$ から $t = 30$ の値の時間平均をとって得たものである. また, 実線はコルモゴロフの $5/3$ 則を表す.

図 1(a)(b) のいずれの場合も, 慣性領域 (およそ波数 $k \in [10, 100]$ 程度の領域) では $5/3$ 則の線に沿っていることが見て取れる. つまり, 部分粘性や超粘性の場合についても通常の Navier–Stokes 方程式と同様にコルモゴロフの $5/3$ 則におよそ従っていることがわかる.

さらに, 外力をなくした場合の $(A, \Lambda) = (2, 0), (5, 100)$ について $E(k, t)$ を計算をした. ただし初期値は, 各々のパラメータ (A, Λ) に対して上記の方法で低周波領域 $|K| < 2$ にエネルギーを注入して時間発展させて得た速度場を初期値として計算した.

その結果, $(A, \Lambda) = (5, 100)$ の場合も, およそ $(A, \Lambda) = (2, 0)$ の場合と同様に時間減衰していることが見て取れた. このことから, 高周波にのみ粘性を入れた GNS でも低周波部分のエネルギー減衰は, 通常の Navier–Stokes 方程式と同様に引き起こされていることがわかる.

4 結論

GNS について, 定理では任意の初期値に対する時間大域的な有界性が証明された. この定理より速度の高周波成分は, 低周波成分の粘性非粘性にかかわらず有界性が保証されていることがわかる. 一方で, 数値計算結果としていくつかの初期値についてエネルギーカスケードを引き起こし, エネルギーが減衰することが得られた. これに対して, ABC-Flow の速度場のように時間発展させたときに, エネルギーカスケードを引き起こさない初期値が存在する. つまり, GNS においてエネルギー減衰をいうためには, 少なくとも初期値をエネルギーカスケードするか否かで分類する必要があることがわかった.

また、これらの結論から通常の Navier–Stokes 方程式に対して次のことが考えられる。Navier–Stokes 方程式の解の L^2 ノルムの減衰性は示されるが、 H^1 ノルムの減衰性などは示されていない。また、 L^2 ノルムの減衰性を示すときは、Navier–Stokes 方程式と速度 v との L^2 内積を取ることによって得られるエネルギー不等式によって示される。しかし、今回見たようにエネルギーカスケードするならば、高周波だけの粘性の効果でエネルギーの時間減衰がいえるとは思えない。つまり、初期値をエネルギーカスケードするか否かで分類できた場合、従来のエネルギー不等式よりシャープな空間での減衰性が言える可能性があることが示唆される。

参考文献

- [1] T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A. M. Soward. Chaotic streamlines in the abc flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 167:353–391, 1986.
- [2] T. Elgindi, W. Hu, and V. r. Šverák. On 2d incompressible Euler equations with partial damping. *Comm. Math. Phys.*, 355(1):145–159, 2017.
- [3] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold’s numbers. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 30:301–305, 1941.
- [4] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [5] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.
- [6] K. R. Sreenivasan. On the universality of the Kolmogorov constant. *Physics of Fluids*, 7(11):2778–2784, 1995.