グラフ上のボーズ・アインシュタイン凝縮と非因子性, その応用について

九州大学大学院数理学府数理学専攻
博士後期課程２年
神田　智弘 (Tomohiro KANDA)*

1　背景

統計力学は，ミクロな構成単位が従う物理法則から，系全体の従うマクロな法則を導き出す理論である．ミクロな構成単位が古典力学に従うとき古典統計力学，量子力学に従うとき量子統計力学という．数理物理学においては，統計力学で考察される格子上の模型の平衡状態の一意性などが研究対象になる．空間の平衡状態に対応するのが KMS 状態である．KMS 状態とは，KMS(Kubo–Martin–Schwinger) 条件，量子統計力学において熱平衡状態にある系の性質を数学的に記述する条件を満たす状態のことである．

ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) は，超電導や超流動に関連する物理的に非常に特異な現象である．数学的にはワイル CCR 環を用いて理想ボーズ気体においてある条件下で BEC が起こることが Lewis と Pulé[8] によって得られている．理想ボーズ気体における BEC はワイル CCR 環上の状態は準自由状態と呼ばれる特別なもので表現され，[8] では BEC が起こる時の準自由状態は非因子的であることが示唆されている．これは，BEC が起こっているときはある状態の重ね合わせで表せるであろうということである．この場合の具体的な計算方法は，[4] や [8] をみてほしい．他にも１粒子のハミルトニアンを変えて BEC が起こるかどうかの研究もある．

グラフ上でも理想ボーズ気体と同様のモデルを考えることができる．グラフにおいてはシュレディンガー方程式に現れるラプラシアンをグラフラプラシアンに変えて，自由粒子の場合と同様の議論を行うことで自由粒子の場合と類似した条件下で BEC が起こることが計算できる [9]．この場合では，ある特別な条件があると BEC が起こっている時の準自由状態は KMS 状態であることがわかり，非因子的であることもわかる．つまり，BEC を起こっている時準自由状態は何らかの KMS 状態の重ね合わせで書ける．

今回は，まずグラフ上の BEC についての結果 [6]，[9] について紹介する．そして，今回の主結果である「BEC を表している状態が非因子的である」ことの証明の概略を述べる．この結果が [7] の主結果である．

2　準備

この章では，ワイル CCR 環と準自由状態について考察する．この準自由状態の特別な場合が BEC に対応している．準自由状態の解析に有用なので [1]，[2]，[3] の結果の記号と定義を用いてワイル CCR 環の定義と準自由状態の定義や成り立つ事実を述べる．

* t-kanda@math.kyushu-u.ac.jp

$\tilde{K}$ を $\mathbb{C}$-線形空間, $\Gamma_{\tilde{K}}$ を反線形形式で $\Gamma_{\tilde{K}}^2 = \mathbb{1}$ を満たすものとする．$\gamma_{\tilde{K}} : \tilde{K} \times \tilde{K} \to \mathbb{C}$ を半双線形形式で, $\gamma_{\tilde{K}}(\Gamma_{\tilde{K}} f, \Gamma_{\tilde{K}} g) = -\gamma_{\tilde{K}}(g, f)$ を満たすとする．$(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の CCR 環 $\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ を $B(f)$, $f \in \tilde{K}$, その共役 $B(f)^*$, $f \in \tilde{K}$ と単位元から生成される $*$-環とし，これらの元は以下の関係式を満たすとする：

1. $B(f)$ は f に対して $\mathbb{C}$-線形,
2. $B(f)^* B(g) - B(g) B(f)^* = \gamma_{\tilde{K}}(f, g)\mathbb{1}$,
3. $B(\Gamma_{\tilde{K}} f)^* = B(f)$.

$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の線形汎関数 φ が条件 $\varphi(A^* A) \geq 0$, $A \in \mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ と $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ を満たす時，φ を状態と呼ぶ．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ に対して，φ に付随する GNS-表現空間 $(\mathfrak{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ が存在する．$\mathrm{Re}\tilde{K} := \{ f \in \tilde{K} \mid \Gamma_{\tilde{K}} f = f \}$ と定義する．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ で任意の $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ に対して $\pi_\varphi(B(f))$ が本質的自己共役であるとき，状態 φ は正則状態と呼ばれる．このとき $W_\varphi(f) = \exp(i\pi_\varphi(B(f)))$, $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ と定義すると $W_\varphi(f)$ はワイル・シーガルの関係式を満たす：

$$W\varphi(f) W_\varphi(g) = \exp(-\gamma_{\tilde{K}}(f, g)/2) W_\varphi(f + g), \quad f, g \in \mathrm{Re}\tilde{K}. \tag{2.1}$$

より一般的には，ワイル CCR 環は式 (2.1) を満たすユニタリ元 $W(f)$, $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ より生成される普遍的 C*-環として定義され $\mathcal{W}(\mathrm{Re}\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}})$ と書く．（詳しくは [4, Theorem 5.2.8.]．）

$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ が以下の等式

$$\begin{aligned} &\varphi(B(f_1) \cdots B(f_{2n-1})) = 0, \\ &\varphi(B(f_1) \cdots B(f_{2n})) = \sum \prod_{j=1}^{n} \varphi(B(f_{s(j)}) B(f_{s(j+n)})), \end{aligned} \tag{2.2}$$

を満たす時，状態 φ は準自由であるという．ここで，$n \in \mathbb{N}$ で和は $s(1) < s(2) < \cdots < s(n), s(j) < s(j+n)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たす全ての置換 s を走る．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の任意の準自由状態 φ に対して，半双線形形式 $S_{\tilde{K}} : \tilde{K} \times \tilde{K} \to \mathbb{C}$ を

$$S_{\tilde{K}}(f, g) = \varphi(B(f)^* B(g)), \quad f, g \in \tilde{K} \tag{2.3}$$

と定義すると，半正定値で $B(f)$ の満たす関係式 2 より

$$\gamma_{\tilde{K}}(f, g) = S_{\tilde{K}}(f, g) - S_{\tilde{K}}(\Gamma g, \Gamma f), \quad f, g \in \tilde{K}. \tag{2.4}$$

を満たす ([1, Lemma 3.2.])．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の任意の準自由状態 φ は式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S を定め，逆に式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S があると，式 (2.3) を満たす準自由状態 φ が一意的に定まり，φ は正則状態であることがわかる ([1, Lemma 3.5.])．なので，式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S から定まる $\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態を φ_S と書くことにする．半正定値双線形形式 $(\cdot, \cdot)_S$ より定まる半正定値双線形形式を

$$(f, g)_S := S_{\tilde{K}}(f, g) + S_{\tilde{K}}(\Gamma_{\tilde{K}} g, \Gamma_{\tilde{K}} f), \quad f, g \in \tilde{K} \tag{2.5}$$

で定め，また $N_S := \{ f \in \tilde{K} \mid \|f\|_S = 0 \}$, $\|f\|_S = (f, f)_S^{1/2}$ とする．この半正定値双線形形式で $\tilde{K}/N_S$ を完備化した空間を K と書くことにする．$S_{\tilde{K}}(f, f) \leq \|f\|_S^2$ と $|\gamma_{\tilde{K}}(f, f)| \leq \|f\|_S^2$ より，K 上の有界作用素 S_K を

$$(\xi, S_K \eta)_S = S_K(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in K \tag{2.6}$$

として定義する．

定義 2.1. $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の正則状態 φ が因子的であるとは，表現空間 $(\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi)$ 上の作用素 $W_\varphi(f)$ から生成されるフォン・ノイマン環

$$R_\varphi := \overline{\{\, W_\varphi(f) \mid f \in \mathrm{Re}\tilde{K}\,\}}^{w} \tag{2.7}$$

が因子的である時にいう．つまり，$R_\varphi \cap R'_\varphi = \mathbb{C}\mathbb{1}$．ここで，有界線形作用素の部分集合 $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ に対して，$\overline{A}^{w}$ は A の弱位相による閉包で，$R\varphi'$ は R_φ の元全てと可換になる $\mathfrak{H}_\omega$ 上の有界線形作用素すべてを集めた環である．

補題 2.2. [2, Lemma 2.4.] 作用素 S_K が固有値 $1/2$ を持つことと準自由状態 φ_S が非因子的であることは同値.

2.1 準自由状態の準同値性

まず，表現の準同値性について定義する.

定義 2.3. [2, Definition 6.1.] $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} に対して，π_{S_1} と π_{S_2} をそれぞれの準自由状態に付随する表現とする．この準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} が準同値であるとは，R_{φ_1} から R_{φ_2} へのフォン・ノイマン環としての同型写像 τ が存在して，

$$\tau(W_{S_1}(f)) = W_{S_2}(f), \quad f \in \mathrm{Re}\tilde{K}, \tag{2.8}$$

を満たす時にいう．ここで，$W_{S_1}(f) = \exp(i\pi_{S_1}(B(f)))$，$W_{S_2}(f) = \exp(i\pi_{S_2}(B(f)))$ である.

この時以下が成立する.

定理 2.4. [3, Theorem] $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} が準同値であることと，以下が成立することは同値：

1. $\|\cdot\|_{S_1}$ と $\|\cdot\|_{S_2}$ から誘導される位相は同じものである.
2. K を $\|\cdot\|_{S_1}$ もしくは，$\|\cdot\|_{S_2}$ で $\tilde{K}$ を完備化した空間とする．このとき，$S_1^{1/2} - S_2^{1/2}$ が K 上でヒルベルト・シュミットクラスである．ここで S_1 と S_2 は K 上の作用素で式 (2.6) で定義されるものである.

2.2 ワイル CCR 環と $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ の対応

定義 2.5. $\mathfrak{h}$ をあるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分空間とする．$\sigma(f,g) := \mathrm{Im}\langle f,g\rangle$，$f,g \in \mathfrak{h}$ とする．$W(f)$ を関係式

$$W(0) = \mathbb{1}, \quad W(f)^* = W(-f), \quad W(f)W(g) = e^{-\frac{i\sigma(f,g)}{2}}W(f+g) \tag{2.9}$$

を満たすとする．ワイル *CCR* 環 $\mathcal{W}(\mathfrak{h},\sigma)$ は $W(f)$ から生成される普遍的 C*-環である.

ワイル CCR 環上の状態 φ が正則であるとは，任意の f に対して，$\varphi(W(tf))$ が $t \in \mathbb{R}$ について連続である時をいう．φ をワイル CCR 環上の正則状態とすると，GNS 表現空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ 上に関係式 $\pi_\varphi(W(f)) = \exp(i\Psi_\varphi(f))$ を満たす自己共役作用素 $\Psi_\varphi(f)$，$f \in \mathfrak{h}$ が取れる．この Ψ_φ を用いて表現空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ 上に消滅作用素 $a_\varphi(f)$ と生

成作用素 $a_\varphi^\dagger(f)$，$f\in\mathfrak{h}$ を

$$a_\varphi(f)=\frac{\Psi_\varphi(f)-i\Psi_\varphi(if)}{\sqrt{2}},\quad a_\varphi^\dagger(f)=\frac{\Psi_\varphi(f)+i\Psi_\varphi(if)}{\sqrt{2}} \tag{2.10}$$

と定義する．以下では $a_\varphi(f)$ と $a_\varphi^\dagger(f)$ の φ を省略する．

ワイル CCR 環と正則状態 φ があった時に $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ を構成する．まず，$\tilde{K}:=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}$ とおく．$f\in\mathfrak{h}$ に対して，正規直交基底による分解が与えられるが，その分解を一つ固定し，$f=\sum f_k e_k$ となるとする．ここで，$f_k\in\mathbb{C}$，$\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は正規直交基底である．この分解に対して，$\overline{f}$ を $\overline{f}:=\sum\overline{f_k}e_k$ と定義する．$f_1,f_2\in\mathfrak{h}$ に対して，$\Gamma_{\tilde{K}}(f_1\oplus f_2):=\overline{f_2}\oplus\overline{f_1}$ と定義し，

$$\gamma(f_1\oplus f_2,g_1\oplus g_2)=\frac{\langle f_1,g_1\rangle-\langle f_2,g_2\rangle}{2},\quad B(f_1\oplus f_2):=\frac{a^\dagger(f_1)+a(\overline{f_2})}{\sqrt{2}} \tag{2.11}$$

とおく．すると，$\mathcal{W}(\mathrm{Re}\tilde{K},\gamma\restriction_{\mathrm{Re}\tilde{K}})=\mathcal{W}(\mathfrak{h},\sigma)$ となる．

3 グラフ上の BEC について

$G=(VG,EG)$ を無向グラフとする．ここで，VG は G の頂点の集合で，EG は G の辺の集合である．$x,y\in VG$ に対して，x と y がつながっていることを $x\sim y$ と書き，任意の頂点 $x\in VG$ に対して，x の次数を $\deg(x)=|\{\,y\in VG\mid x\sim y\,\}|$，$\deg:=\sup_{x\in VG}\deg(x)$ とおく．ここで集合 A に対して，$|A|$ は A の元の個数を表す．ここでは，$\deg<\infty$，連結，可算無限この頂点を持つとする．δ_x，$x\in VG$ を $\delta_x(z)=0$，$z\neq x$，$\delta_x(x)=1$ となる $\ell^2(VG)$ のベクトルとする．グラフ G の隣接行列 A_G を $\langle\delta_x,A_G\delta_y\rangle$ が x から y への辺の数となるように定義する．すると，$\sqrt{\deg}\leq\|A_G\|\leq\deg$ となることがわかり，今の場合は A_G は $\ell^2(VG)$ 上の自己共役な有界作用素となる．グラフ G の次数行列 D_G を $f\in\ell^2(VG)$ に対して，$(D_Gf)(x)=\deg(x)f(x)$，$x\in VG$ と定義する．グラフ G 上のグラフラプラシアン Δ_G を $\Delta_G=D_G-A_G$ で定義する．

グラフ G が有限グラフの増大列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持ち，かつ

$$G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n=\lim_{n\to\infty}G_n,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|\partial G_n|}{|G_n|}=0, \tag{3.12}$$

を満たすとする．ここで，$|\partial G_n|$ は G_n から $G\backslash G_n$ へつながる辺を持つ頂点の数を表すものとする．それぞれの有限グラフ G_n に対して，$\omega_n^{(\beta,\rho)}$ を $\mathcal{W}(\ell^2(G_n),\sigma)$ 上の逆温度 β，密度 ρ のグランドカノニカル分布より定まる KMS 状態

$$\begin{aligned}\omega_n^{(\beta,\rho)}(W(f))&=\exp\left(-\frac{1}{4}\Big\langle f,(e^{\beta(h_n-\mu_n)}+\mathbb{1})(e^{\beta(h_n-\mu_n)}-\mathbb{1})^{-1}f\Big\rangle\right),\\ \omega_n^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g))&=\Big\langle g,(e^{\beta(h_n-\mu_n)}-\mathbb{1})^{-1}f\Big\rangle,\end{aligned} \tag{3.13}$$

とする．ここで，$h_n=\|A_{G_n}\|\mathbb{1}-A_{G_n}$，もしくは $h_n=\Delta_{G_n}$ で $\mu_n<0$ は次の方程式

$$\rho=\frac{1}{|G_n|}\sum_{k\in VG_n}\omega_n^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(\delta_k)a(\delta_k))=\frac{1}{|G_n|}\mathrm{Tr}\Big((e^{\beta(h_n-\mu_n)}-\mathbb{1})^{-1}\Big) \tag{3.14}$$

より一意的に定まる数とする．μ_n は化学ポテンシャルと呼ばれている数である．$\overline{\rho}(\beta)$ を

$$\overline{\rho}(\beta)=\sup_{\mu<0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|G_n|}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{e^{\beta(h_n-\mu)}-\mathbb{1}}\right) \tag{3.15}$$

と定義する．もし任意の δ_x，$x \in VG$ に対して，h が

$$\sup_{x \in VG} \left\langle \delta_x, h^{-1}\delta_x \right\rangle < \infty, \tag{3.16}$$

を満たす時 h を非再帰的であると言う．ベクトル $f = \sum_{x \in VG} f(x)\delta_x \in \ell^2(VG)$ が有限個の $x \in VG$ でしか値を持たない時，f をコンパクト台を持つベクトルということにする．[9, Proposition 1.1 and Theorem 1.1] では，h がグラフラプラシアンの場合に，h が非再帰的，$\overline{\rho}(\beta) < \infty$ と熱力学極限における状態 $\omega^{(\beta,\rho)}$ が式 (3.13) で定義される状態の部分列の極限として表され，

$$\omega^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle f, (e^{\beta(h-\mu_\infty)} + \mathbb{1})(e^{\beta(h-\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle\right) & (0 < \rho \le \overline{\rho}(\beta)) \\ \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle f, (e^{\beta h} + \mathbb{1})(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle - \frac{\rho - \overline{\rho}(\beta)}{2} |\langle v_G, f\rangle|^2\right) & (\overline{\rho}(\beta) < \rho) \end{cases}, \tag{3.17}$$

$$\omega^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \begin{cases} \left\langle g, (e^{\beta(h-\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle & (0 < \rho \le \overline{\rho}(\beta)) \\ \left\langle g, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle + (\rho - \overline{\rho}(\beta))\overline{\langle v_G, g\rangle}\langle v_G, f\rangle & (\overline{\rho}(\beta) < \rho) \end{cases}, \tag{3.18}$$

が成立する．ここで，$f, g \in \ell^2(VG)$ はコンパクト台を持つベクトルで，v は A_G に対するペロン・フロベニウスベクトルに対応するもので任意のコンパクト台を持つベクトル f に対して，$\langle v, A_G f\rangle = \|A_G\|\langle v, f\rangle$ となるものである．このような v の存在性は [5, Proposition 4.1] で示されているが，通常 v は $\ell^2(VG)$ の元ではない．今の場合は，全ての $x \in VG$ に対し $v(x) = 1$ となる．$\rho > \overline{\rho}(\beta)$ のときは，BEC が起こっている時に対応し，$\rho \le \overline{\rho}(\beta)$ のときは BEC が起こっていない時に対応する．

定義 3.6. $\mathcal{C}$ を単位元を持つ C*-環とし，ω を $\mathcal{C}$ 上の状態とする．また，α を $\mathcal{C}$ 上の 1 径数自己同型群とし，$\beta > 0$ とする．ω が α 不変，つまり，任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して

$$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A), \tag{3.19}$$

かつ，任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $I_\beta = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < \beta \}$ 上で解析的，I_β の閉包 $\overline{I_\beta}$ 上で連続かつ有界であるような複素関数 $F_{A,B}$ が存在して，

$$F_{A,B}(t) = \omega(A\alpha_t(B)), \quad F_{A,B}(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(B)A), \quad A, B \in \mathcal{C} \tag{3.20}$$

を満たすときに，ω を (α, β)-*KMS* 状態であるという．

[6, Theorem 4.5] では，$h = \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ の時に，h が非再帰的であるとすると，ある条件を満たす $\mathfrak{h} \subset \ell^2(VG)$ の任意の元 $f \in \mathfrak{h}$ と $D \ge 0$ に対し，

$$\omega_D(a^\dagger(f)a(g)) = \left\langle g, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle + D\overline{\langle v, g\rangle}\langle v, f\rangle \tag{3.21}$$

で定義される準自由状態が $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の (α, β)-KMS 状態になっていることが示された．ここで，$\alpha_t(W(f)) = W(e^{ith} f)$，$f \in \mathfrak{h}$ である．

3.1 BEC と準自由状態の非因子性

$\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{ e^{ith}\delta_x \mid t \in \mathbb{R}, x \in VG \}$ とすると，式 (3.21) により定まる状態 ω_D は $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の KMS 状態である．この状態はとくに正則状態である．2.2 節の対応関係を用いて双線形形式 S_D は

$$\begin{aligned} &S_D(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2) = \omega_D(B(f)^* B(g)) \\ =&\frac{\left\langle f_1, e^{\beta h}(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_1\right\rangle}{2} + \frac{\left\langle f_2, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_2\right\rangle}{2} + \frac{D}{2}\overline{\langle v, f_1\rangle}\langle v, g_1\rangle + \frac{D}{2}\overline{\langle v, f_2\rangle}\langle v, g_2\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

となり，また

$$
\begin{aligned}
&(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2)_D := S_D(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2) + S_D(\Gamma(g_1 \oplus g_2), \Gamma(f_1 \oplus f_2)) \\
=&\frac{\left\langle f_1, (e^{\beta h} + \mathbb{1})(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_1 \right\rangle + \left\langle f_2, (e^{\beta h} + \mathbb{1})(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_2 \right\rangle}{2} + D\overline{\langle v, f_1 \rangle}\langle v, g_1 \rangle + D\overline{\langle v, f_2 \rangle}\langle v, g_2 \rangle
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

となる．ここで，$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathfrak{h}$．ここから得られる $\tilde{K} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ の $\|\cdot\|_D$ による完備化した空間 K_D は

$$
K_D = \begin{cases} \mathbb{C}^2 \oplus \overline{\tilde{K}}^0 & (D > 0) \\ \overline{\tilde{K}}^0 & (D = 0) \end{cases} \tag{3.24}
$$

となることが示せる [7, Lemma 4.1]．ここで，$\overline{\tilde{K}}^0$ は $\|\cdot\|_0$ で $\tilde{K}$ を完備化した空間である．さらに K_D 上の作用素 S_D は定義より $D > 0$ の時に $1/2$ の固有値を持ち，$D = 0$ の時は $1/2$ の固有値を持たないことがわかる．とくに $D > 0$ の時が，BEC が起こっている状態，$D = 0$ のときが，BEC が起こっていない時の状態に対応しているので，以下を得る．

定理 3.7. [7, Theorem 4.5] $h := \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ とし，h が非再帰的とする．この時，式 (3.21) で定義される状態 ω_D は，$D > 0$ の時非因子的であり，$D = 0$ の時因子的である．つまり，*BEC* が起こっている時は非因子的であり，*BEC* が起こっていない時は因子的である．

表現の規約分解と同様に状態が非因子的な場合は因子的な状態に分解できる．今の場合は

$$
\omega_D(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h} + \mathbb{1})(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} - \frac{D}{2}|\langle v, f \rangle|^2 \right) \tag{3.25}
$$

なので，特に

$$
\begin{aligned}
&\omega_D(W(f)) = \omega_0(W(f)) \exp\left(\frac{D}{2}|\langle v, f \rangle|^2 \right) \\
=&\omega_0(W(f)) \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-iD^{1/2} \frac{s_1 \mathrm{Re}\langle v, f \rangle + s_2 \mathrm{Im}\langle v, f \rangle}{2} \right) e^{-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} ds_1 ds_2
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

とできる．ここで，ω_{s_1, s_2} を

$$
\omega_{s_1, s_2}(W(f)) = \omega_0(W(f)) \exp\left(-iD^{1/2} \frac{s_1 \mathrm{Re}\langle v, f \rangle + s_2 \mathrm{Im}\langle v, f \rangle}{2} \right) \tag{3.27}
$$

と定義すると，これは $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の KMS 状態であり，特に因子的になる [7, Theorem 3.2]．また，$s_1 \neq t_1$ もしくは $s_2 \neq t_2$ が成立している時には準同値でないことがわかる [7, Theorem 3.4]．よって，以下が得られる．

定理 3.8. [7, Theorem 4.5] $D > 0$ のとき ω_D は因子分解

$$
\omega_D = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_{s_1, s_2} d\mu(s_1, s_2) \tag{3.28}
$$

をもつ．また ω_{s_1, s_2} は因子的であり，互いに準同値でない．

注意 3.9. 以上の議論と同様に $\mu < 0$ に対して

$$\omega(W(f)) := \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta(h-\mu)} + \mathbb{1})(e^{\beta(h-\mu)} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle}{4}\right) \tag{3.29}$$

となる ω に対しても因子性が導かれる．ここで $h = \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ で，$f \in \mathfrak{h}$ である．

参考文献

[1] H. Araki, M. Shiraishi: On quasifree states of the canonical commutation relations. I, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **7** (1971/72), 105–120.

[2] H. Araki: On quasifree states of the canonical commutation relations. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **7** (1971/72), 121–152.

[3] H. Araki, S. Yamagami: On quasi-equivalence of quasifree states of the canonical commutation relations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), no. 2, 703–758

[4] O. Bratteli, D. Robinson: Operator algebras and quantum statistical mechanics II, 2nd edition (Springer, 1997.)

[5] F. Fidaleo, D. Guido, T. Isola: Bose-Einstein condensation on inhomogeneous amenable graphs. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **14** (2011), no. 2, 149–197.

[6] F. Fidaleo: Harmonic analysis on inhomogeneous amenable networks and the Bose-Einstein condensation. *J. Stat. Phys.* **160** (2015), no. 3, 715–759.

[7] T. Kanda: Remarks on BEC on graphs. *Rev. Math. Phys.* **29** (2017), no.8, 1750024, 19pp.

[8] J. T. Lewis, J. V. Pulè: The equilibrium states of the free Boson gas. *Comm. Math. Phys.* **36** (1974), 1–18.

[9] T. Matsui: BEC of free bosons on networks. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006), no. 1, 1–26.