マルコフシステムのランダム複素力学系

渡邉天鵬 (Takayuki WATANABE)
大阪大学 大学院理学研究科数学専攻 修士二年

概要

研究の目標は，複素力学系の派生として，写像を選択する方法がマルコフ連鎖のようにランダム性があるランダム複素力学系を考察することである．独立同分布で写像を選択するランダム複素力学系で知られていた結果を一般化し，ある意味で力学系が穏やかになるための十分条件を与える．さらに特殊な状況の時に，無限遠点に収束する確率の関数により，鋭敏な初期値の集合を特徴付けられることを示す．本講演は京都大学の角大輝氏との共同研究に基づく．

1　導入

非定数有理関数全体を Rat とおき，$f \in \mathrm{Rat}$ を自然な方法でリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への正則写像とみる．$\hat{\mathbb{C}}$ は 1 次元複素射影空間であり，実 2 次元の球面と同相である．複素力学系では，初期値 z_0 に繰り返し f を反復合成した時の漸近的な振る舞いを考察する．これは一つの規則で時間発展する現象の抽象化であり，数学に限らない科学全般の数理モデルに頻繁に現れるため，応用上も価値がある研究である．

応用をより強く意識した時，一つの規則だけでなく「複数の選択肢から毎回（ランダムに）一つの手段を選ぶ」ような状況を考える必要があるかもしれない．この状況を数学的に，例えば次のようなランダム力学系として考えたい．m 個の有理関数 $f_1, \dots, f_m$ を固定し，初期値 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ からランダムに写像 f_i を選んで時間発展するようなランダム力学系を考える．写像を独立同分布で選ぶ力学系は [1] などで研究されてきたが，これを一般化し，**写像 f_i を選んだ後には確率 p_{ij} で f_j を選ぶ** という条件をつけた，マルコフ的ランダム力学系を考察することが本研究の目標である．現在ランダム力学系の研究は急速に発展しているが，独立同分布なシステムに関する研究が多い．本稿は，独立同分布でないランダム力学系を考えているという点で重要である．

本稿では，筆者がマルコフシステムと呼んでいるものを導入し，そのジュリア集合の基本的な性質を 2,3 節で述べる．4 節では力学系がある意味で穏やかになるための十分条件を与える．さらに，多項式のみからなるマルコフシステムに対し，無限遠点に収束する確率の関数を考え，それによるジュリア集合の特徴づけを与える．また，以上の状況を一つの具体例を通して眺め，その様子を観察する．

2 設定と定義

設定 2.1. $m \in \mathbb{N}$ とする．Rat 上の m^2 個の（非負値）測度 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ で，任意の $i = 1, \cdots, m$ に対し $\sum_{j=1}^{m} \tau_{ij}$ が Rat 上で全測度 1 になるものが与えられたとする．ただし，$\tau_{ij} \equiv 0$ かもしれない．$\hat{\mathbb{C}} \times \{1, \cdots, m\}$ 上の点 (z, i) からボレル集合 $B \times \{j\}$ への遷移確率が $\tau_{ij}(\{f \in \mathrm{Rat}; f(y) \in B\})$ であるマルコフ連鎖を考える．

定義 2.2 (マルコフシステム)**.** 設定 2.1 にある測度の組み τ が与えられたとき，S_τ を次で定める．頂点集合を $V := \{1, 2, \cdots, m\}$，辺集合を $E := \{(i,j) \in V \times V; \tau_{ij} > 0\}$ とする有向グラフを考える．各有向辺 $e = (i,j) \in E$ に有理関数族 $\Gamma_e := \operatorname{supp} \tau_{ij}$ を対応させる．これらの組み $S_\tau := (V, E, (\Gamma_e)_{e \in E})$ を有理関数からなる $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフシステムという．また，$i, t : E \to V$ を第一成分，第二成分への射影とし，$i(e), t(e) \in V$ を有向辺 $e \in E$ の始点，終点と定める．

例 2.3. $g_1(z) = z^2 - 1$, $g_2(z) = \frac{z^2}{4}$ とし，$f_1 = g_1 \circ g_1, f_2 = g_2 \circ g_2$ とする．f_n に重みを持つディラック測度を δ_n とし，$\tau_{11} = \frac{1}{2}\delta_1$, $\tau_{12} = \frac{1}{2}\delta_1$, $\tau_{21} = \delta_2$, $\tau_{22} = 0$ とする．

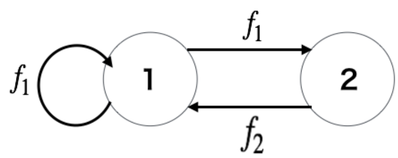

図 1　例 2.3 のグラフ

以下，τ は設定 2.1 で与えられたものとする．定義 2.2 により定まるマルコフシステム S_τ で，そのグラフ (V, E) が（強）連結なものを考える．

定義 2.4.

(i) $e = (e_1, e_2, \ldots, e_N) \in E^N$ が長さ $N \in \mathbb{N}$ の（有限） admissible word であるとは，任意の $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対して，$t(e_n) = i(e_{n+1})$ を満たすことである．この word に対し，$i(e_1), t(e_N)$ を e の始点，終点といい，$i(e), t(e)$ とおく．

(ii) admissible word $e = (e_1, e_2, \ldots, e_N) \in E^N$ に付随する N 個の写像 $f_{e_n} \in \Gamma_{e_n}$ に対し，合成 $f_{e_N} \circ \cdots \circ f_{e_2} \circ f_{e_1}$ の全体を $H(S_\tau)$ とする．これらのうち，$i(e) = i$ となる合成の全体を $H_i(S_\tau)$ とし，さらに $t(e) = j$ となるもの全体を $H_i^j(S_\tau)$ とする．

定義 2.5. 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z_0 で同程度連続であるとは，任意の正の数 ϵ に対して，ある正の数 δ が存在して，z_0 との距離が δ 未満の任意の点 z と任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して，$h(z)$ と $h(z_0)$ との距離が ϵ 未満となることをいう．写像族 $\mathcal{H}$ が点 z で局所同程度連続であるとは，z の近傍 U が存在して，その各点 $z_0 \in U$ で同程度連続であることをいう．

(i) 写像族 $H(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ のファトウ集合という．そうでない点の全体を $J(S_\tau)$ とおき，S_τ のジュリア集合

という．

(ii) $i \in V$ に対し，写像族 $H_i(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F_i(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ の i におけるファトウ集合という．そうでない点の全体を $J_i(S_\tau)$ とおき，S_τ の i におけるジュリア集合という．

ファトウ集合・ジュリア集合は力学系を考える上で最も基本的な対象である．実際，ファトウ集合は「力学系が安定的な振る舞いをする初期値」の集合である．すなわち，初期値 z が少しずれても，時間発展した点は少ししかずれない．ジュリア集合はそうではない初期値の集合である．つまり，初期値に対し鋭敏に反応し，誤差を許しても時間発展した時の様子が予測できないことを意味する．後者になることは決して稀ではなく，例えば次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば，そのジュリア集合 $J(S_\tau)$ は非可算集合になる．また，定義から $F(S_\tau) = \bigcap_{i \in V} F_i(S_\tau), J(S_\tau) = \bigcup_{i \in V} J_i(S_\tau)$ が成り立つ．

3 ジュリア集合の性質

この節では，2 節で定義したジュリア集合（ファトウ集合）の基本的な性質を述べる．ジュリア集合 $J(S_\tau)$ を各頂点ごとのジュリア集合 $J_i(S_\tau)$ に分割すると，それぞれの関係が明らかになる．重要なことは，ファトウ集合は「前向き」，ジュリア集合は「後ろ向き」に不変だということである．

記号 3.1. 写像族 $\mathcal{F}$ と集合 X に対して，$\mathcal{F}(X) := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X)$，$\mathcal{F}^{-1}(X) := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(X)$ と定める．これらをそれぞれ $\mathcal{F}X, \mathcal{F}^{-1}X$ と略記することがある．

また，V で添え字づけられた $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i \in V}, (\tilde{L}_i)_{i \in V}$ について $(L_i)_{i \in V} \subset (\tilde{L}_i)_{i \in V}$ とは，任意の $i \in V$ に対し $L_i \subset \tilde{L}_i$ となることをいう．

定義 3.2. (i) $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i \in V}$ が，S_τ 前向き不変であるとは，任意の $e \in E$ に対し $\Gamma_e(L_{i(e)}) \subset L_{t(e)}$ が成り立つことをいう．

(ii) $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i \in V}$ が，S_τ 後ろ向き不変であるとは，任意の $e \in E$ に対し $\Gamma_e^{-1}(L_{t(e)}) \subset L_{i(e)}$ が成り立つことをいう．

補題 3.3. (i) $(F_i(S_\tau))_{i \in V}, (J_i(S_\tau))_{i \in V}$ はそれぞれ S_τ 前向き，後ろ向き不変である．

(ii) 各々 3 点以上を含む $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合たち $(L_i)_{i \in V}$ が S_τ 後ろ向き不変ならば，$(J_i)_{i \in V} \subset (L_i)_{i \in V}$ となる．

(iii) 高々 2 点を除く $J_j(S_\tau)$ の点 z について，任意の $i \in V$ に対し $J_i(S_\tau) = \overline{(H_i^j)^{-1}(z)}$ となる．

(iv) 各辺 $e \in E$ に対し，Γ_e が Rat のコンパクト集合だったとする．このとき，任意の $i \in V$ について，$\bigcup_{i(e)=i} \Gamma_e^{-1}(J_{t(e)}(S_\tau)) = J_i(S_\tau)$ が成り立つ．

注意 3.4. (iii) により，コンピュータを用いてジュリア集合 $J(S_\tau)$ の図を描くことができる．図 2 はこの方法により描画した．また (iv) により，ジュリア集合 J_i は $J_{t(e)}$ の「コピー」たち $\Gamma_e^{-1}(J_{t(e)})$ の和集合であり，そのために「フラクタル」の形になる．正則関数は微分が消え

ない点で共形的 (conformal) であることに注意する．

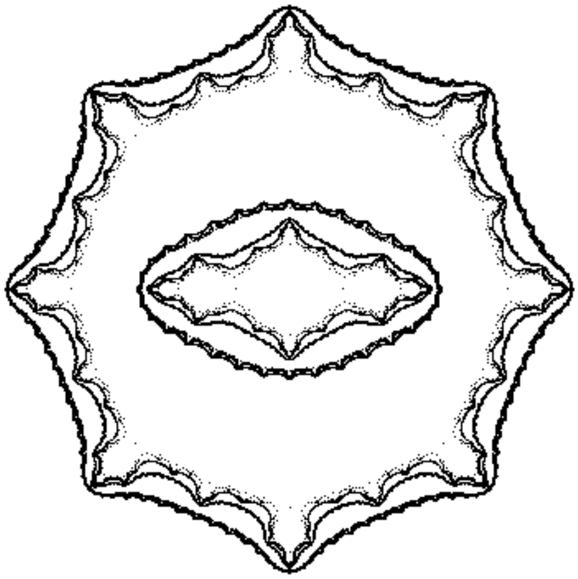

図 2　例 2.3 のジュリア集合

定義 3.5. S_τ が non-elemantary であるとは，任意の $i \in V$ に対し J_i が 3 点以上を含むことをいう．

次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば，そのシステムは non-elementary になる．したがって，非常に多くの場合にシステムは non-elementary である．

補題 3.6. S_τ が non-elementary なら，各 $J_i(S_\tau)$ は孤立点を持たない．したがって，非可算集合になる．

定理 3.7. S_τ が non-elementary なら，任意の $i \in V$ に対して $h \in H_i^i(S_\tau)$ の反発的固定点全体は $J_i(S_\tau)$ 内で稠密である．ここで，有理関数 h の固定点 z が反発的であるとは，z での h の微分の絶対値が 1 より大きいことをいう．

定義 3.8. 集合 $J_{\ker,i}(S_\tau) := \bigcap_{j\in V} \bigcap_{h\in H_i^j(S_\tau)} h^{-1}(J_j(S_\tau))$ をマルコフシステム S_τ の $i \in V$ における核ジュリア集合という．$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) := \bigcup_{i\in V} J_{\ker,i}(S_\tau) \times \{i\} \subset \hat{\mathbb{C}} \times V$ とおく．

定義 3.9. マルコフシフテム S_τ が後ろ向き分離条件を満たすとは，始点を共有する二辺 $e_1, e_2 \in E$ と任意の $f_{e_1} \in \Gamma_{e_1}, f_{e_2} \in \Gamma_{e_2}$ に対し，$f_{e_1}^{-1}(J_{t(e_1)}(S_\tau)) \cap f_{e_2}^{-1}(J_{t(e_2)}(S_\tau)) = \emptyset$ となることをいう．ただし，$e_1 = e_2$ かつ $f_{e_1} = f_{e_2}$ となる場合を除く．

補題 3.10. S_τ が後ろ向き分離条件を満たすとする．さらに，始点 $i \in V$ を共有する二辺 $e_1, e_2 \in E$ と $f_1 \in \Gamma_{e_1}, f_2 \in \Gamma_{e_2}$ が存在して，$e_1 \neq e_2$ または $f_1 \neq f_2$ が成り立つと仮定する．このとき，$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ となる．

4　無限遠点に発散する確率

$\mathbb{Y} := \hat{\mathbb{C}} \times V$ と定める．$\hat{\mathbb{C}}$ の球面距離を用いて $\mathbb{Y}$ 上に距離 $d_{\mathbb{Y}}$ を定めることができ，位相的に $\hat{\mathbb{C}}$ のコピーの非交和と同一視する：$\mathbb{Y} \cong \sqcup_V \hat{\mathbb{C}}$.

定義 4.1. 次の作用素 M_τ を τ の推移作用素という：

$$M_\tau \phi(y,i) := \sum_{j \in V} \int_{\Gamma_{ij}} \phi(\gamma(y), j)\, \mathrm{d}\tau_{ij}(\gamma), \quad (y,i) \in \mathbb{Y}.$$

$\mathbb{Y}$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体の空間に上限ノルムをつけたバナッハ空間を $\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ とする．リースの表現定理より，バナッハ空間としての $\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ の双対空間 $\mathrm{C}(\mathbb{Y})^*$ は，$\mathbb{Y}$ 上の複素ボレル測度全体と同一視できる．

記号 4.2. $\mathbb{Y}$ 上のボレル確率測度全体を $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ とし，$\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y}) \subset \mathrm{C}(\mathbb{Y})^*$ に汎弱位相を入れる．すなわち，$\mu_n \to \mu$ とは，任意の $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して $\mu_n(\phi) \to \mu(\phi)$ となることである．ここで，$\mu \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ に対して，$\mu(\phi) := \int_{\mathbb{Y}} \phi\, \mathrm{d}\mu$, $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ とおく．

補題 4.3. 推移作用素 M_τ に対し，次が成り立つ．

(i) 任意の $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して $M_\tau \phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ である．

(ii) 推移作用素 $M_\tau : \mathrm{C}(\mathbb{Y}) \to \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ は線形であり，その作用素ノルムは 1 である．したがって，M_τ の随伴作用素 M_τ^* は非負値有限測度を非負値有限測度に写し，かつその全測度を保つ．

注意 4.4. 位相空間 $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ は次のように距離化可能であり，それによってコンパクト距離空間となる：$\mathbb{Y}$ のコンパクト性から，$\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ の可算稠密な関数族 $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する．そこで，$\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ の距離を $d_0(\mu_1, \mu_2) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_1(\phi_n) - \mu_2(\phi_n)|}{1 + |\mu_1(\phi_n) - \mu_2(\phi_n)|}$ によって定める．

定義 4.5. 推移作用素 $M_\tau : \mathrm{C}(\mathbb{Y}) \to \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して，$F_{\mathrm{meas}}(M_\tau^*)$ を随伴写像の n 回合成からなる写像族 $\{(M_\tau^*)^n : \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y}) \to \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})\}_{n \in \mathbb{N}}$ が局所同程度連続な点の集合とする．

定義 4.6. 無限アドミッシブルワードとそれに付随する写像列の全体を

$$X(S_\tau) := \{\xi = (\gamma_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathrm{Rat} \times E)^{\mathbb{N}}; \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して} \gamma_n \in \Gamma_{e_n}\}$$

とおく．これらのうち，始点が $i \in V$ の列全体を $X_i(S_\tau)$ とおく．また，有限集合 E に離散位相を入れ，積位相により $X(S_\tau)$ は位相空間とする．

記号 4.7. $\xi = (\gamma_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X(S_\tau)$ に対して，$\gamma_{N,M} := \gamma_N \circ \cdots \circ \gamma_M$ とおく．

定義 4.8. 各 $\xi = (\gamma_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X(S_\tau)$ に対して，写像族 $\{\gamma_{n,1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が局所同程度連続である点の全体を ξ のファトウ集合 F_ξ とし，$F^\xi := \{\xi\} \times F_\xi \subset X \times Y$ とおく． ジュリア集合を $J_\xi := Y \setminus F_\xi$, $J^\xi := \{\xi\} \times J_\xi$ と定める．

定義 4.9. $X_i(S_\tau)$ 上のボレル確率測度 $\tilde{\tau}_i$ を次のように定める：

Rat の N 個のボレル集合 $A'_n\,(n=1,\cdots,N)$ と $(e_1,\ldots,e_N)\in E^N$ に対して，$A_n = A'_n \times \{e_n\}$ とする．$\tilde{\tau}_i$ を

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_i(A_1 \times \cdots \times A_N \times \prod_{N+1}^{\infty} (\mathrm{Rat} \times E)) \\
=&\begin{cases} \tau_{e_1}(A'_1)\cdots\tau_{e_N}(A'_N) & ,(e_1,\ldots,e_N) \text{ が } i\in V \text{ から始まるアドミッシブルワード} \\ 0 & ,\text{そうでないとき} \end{cases}
\end{aligned}
$$

となるように定める．ここで，$e=(ij)$ に対し $\tau_e=\tau_{ij}$ である．定め方から $\mathrm{supp}\,\tilde{\tau}_i = X_i(S_\tau)$ である．

補題 4.10. $p_{ij} = \tau_{ij}(\mathrm{Rat})$ とおき行列 $P=(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ を考えると，次が成り立つ．

(i) 各成分が正の横ベクトル $p=(p_1,\ldots,p_m)$ が存在して，$pP=p$ かつ $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ が成り立つ．

(ii) 上の p について $\tilde{\tau}=\sum_{i=1}^m p_i\tilde{\tau}_i$ とおくと，$\tilde{\tau}$ は $X(S_\tau)$ 上のシフト写像に関して不変である．

定理 4.11 (協調原理の一般化). $\mathbb{J}_{\mathrm{ker}}(S_\tau)=\emptyset$ なら， $F_{\mathrm{meas}}(M_\tau^*) = \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ かつ任意の $i\in V$ について $\tilde{\tau}_i$ -a.e. $\xi \in X_i(S_\tau), \mathrm{Leb}(J_\xi)=0$ が成り立つ．

以下本稿では，τ_{ij} たちのサポートは有限集合であり，かつ 2 次以上の多項式のみからなるとする．

定義 4.12. 点 $(z,i)\in\hat{\mathbb{C}}\times V$ に対し，i から始まる無限 admissible word による時間発展が無限遠点に収束する確率を

$$\hat{T}_\infty(z,i) := \tilde{\tau}_i(\{\xi=(\gamma_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X_i(S_\tau)\,;\, d(\gamma_{n,1}(z),\infty)\to 0\,(n\to\infty)\})$$

と定める．また補題 4.10 のベクトル p を固定し，$T_\infty(z) := \sum_{i=1}^m p_i \hat{T}_\infty(z,i)$ と定める．

定義 4.13. $H_i(S_\tau)(z)$ が有界であるような点 z の全体を $K_i(S_\tau)$ とおき，$i\in V$ での最小充填ジュリア集合という．

命題 4.14. 連続関数 $\phi\in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ で，$\phi(\cdot,i)$ のサポートが $K_i(S_\tau)$ と交わらないとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $n\to\infty$ のとき，$M_\tau^n\phi \to \hat{T}_\infty$ となる．

(ii) $M_\tau\hat{T}_\infty = \hat{T}_\infty$ が成り立つ．

(iii) さらに $\mathbb{J}_{\mathrm{ker}}(S_\tau)=\emptyset$ なら， $\hat{T}_\infty$ は $\mathbb{Y}$ 上連続である．

(iv) $\hat{T}_\infty(\cdot,i)$ は $F_i(S_\tau)$ 上で局所定数である．

定理 4.15 (ジュリア集合の特徴づけ). 後ろ向き分離条件を満たすシステム S_τ について，T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続である．また，最小充填ジュリア集合が空でなければ，$i\in V$ でのジュリア集合

$J_i(S_\tau)$ は $\hat{T}_{\infty,\tau}(\cdot,i)$ が局所定数でない点全体と一致する．最小充填ジュリア集合が空なら，T_∞ は値 1 をとる定数関数である．

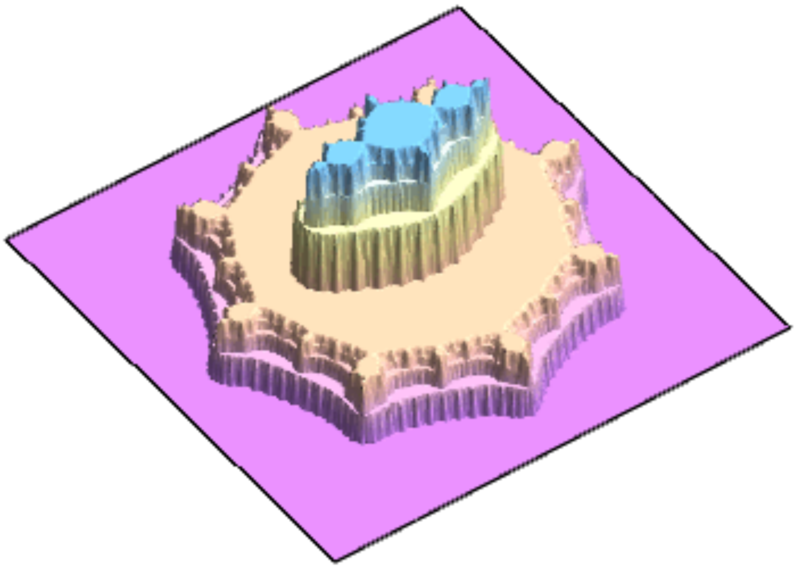

図 3　例 2.3 での，無限遠点に収束しない確率 $1-T_\infty$ のグラフ

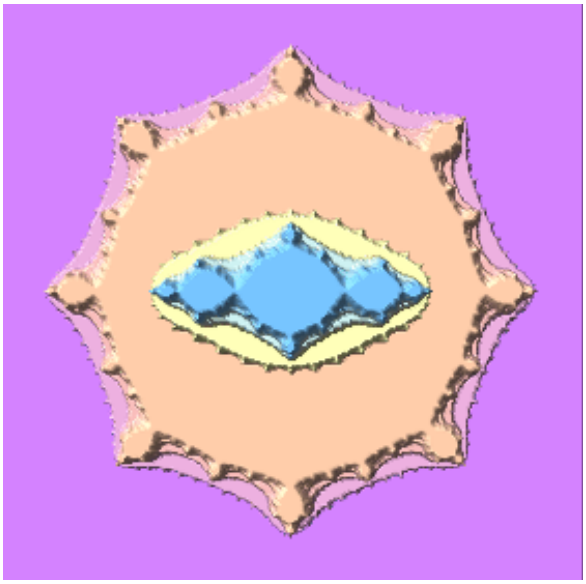

図 4　図 3 を真上から見た様子

参考文献

[1] H. Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 102 (2011), no. 1, 50-112.