Carathéodory の核収束定理について

小山 剛史 (KOYAMA Takeshi)
岡山大学大学院 教育学研究科 教科教育学専攻 修士課程 2 年

概 要

Carathéodory の核収束定理は複素解析学における古典的な結果の 1 つである．私は単葉関数論における大きな問題の 1 つであった Bieberbach 予想について研究している際に，核収束定理が予想の証明に関連していることを知った。核収束定理については様々な文献に結果と証明が書かれている．それらの中から 5 つの文献 ([3], [5], [6], [9], [10]) を調べたところ，いくつか不明瞭な部分がみつかった．本発表では，Carathéodory の核収束定理とその証明について改良した点を中心に述べていく．尚，本発表の内容は岡山大学大学院教育学研究科の出耒光夫先生との共同研究「An elementary proof of the Carathéodory kernel convergence theorem」に基づいている．

1 Bieberbach 予想と核収束定理の関連

1.1 Bieberbach 予想とは

本資料では，$a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して，$B(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ と定める．特に，$\mathbb{D} := B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ と表す．

まず，単葉関数論において最も基本的かつ重要な関数の族 $\mathcal{S}$ を定義する．

定義 1.1. 次の条件を満たす関数 f の族を $\mathcal{S}$ で表す：

1. f は $\mathbb{D}$ 上正則かつ単射である．
2. $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ である．

次に，Bieberbach 予想と深いつながりがある Koebe 関数を定義する．

定義 1.2 (Koebe 関数)**.** ある $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて表される次の関数を Koebe 関数という：

$$f(z) := \frac{z}{(1+e^{i\beta}z)^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

予想 (Bieberbach 予想 [1])**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表す．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_n| \leq n$$

が成り立つ．等号成立は f が Koebe 関数である場合に限る．

Bieberbach 予想は，正則であることと Taylor 展開可能であることが同値であるという複素解析学における重要な結果をもとに，$\mathbb{D}$ における正則性と単射性のみを仮定した関数の族 $\mathcal{S}$ に含まれる関数の展開係数の大きさがどのくらいになるかという問題である．

1.2 Bieberbach 予想の証明と核収束定理の関連

Bieberbach 予想は de Branges [2] によって証明された．その後，Fitzgerald と Pommerenke によって別証明 [4] が与えられた．以下，Fitzgerald と Pommerenke による Bieberbach 予想の証明の手順の一部を説明する．まず，Robertson 予想と予想の定式化に必要な命題を記載する．

命題 1.3. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対して次の 2 条件を満たすある関数 $g \in \mathcal{S}$ が存在する：

(i) すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $g(z)^2 = f(z^2)$.

(ii) g は $\mathbb{D}$ 上の奇関数.

命題 1.4 (Robertson 予想)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f に対して命題 1.3 を用いて得られる関数を g とする．g の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を，g が奇関数であることに注意して，

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}$$

と表す．このとき，各 $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ に対して，

$$1 + \sum_{k=2}^{n} |c_{2k-1}|^2 \leq n$$

が成り立つ．

この Robertson 予想を仮定すると，Bieberbach 予想が成り立つことを証明できる．Robertson 予想は，次の Milin 予想を仮定すると証明することができる．

命題 1.5 (Milin 予想)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f に対して $\mathbb{D}$ 上で正則な関数 h で，$h(0) = 0$ かつ $\mathbb{D}$ 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{f(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる．h の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を，

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k$$

と表す．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ．

つまり，Fitzgerald と Pommerenke による別証明に従うと，Bieberbach 予想を証明するということは，Milin 予想を証明することであると言うことができる．

次に，Carathéodory の核収束定理と Bieberbach 予想の証明の関連について説明するために必要な截線領域，截線写像を定義する．尚,「截線」という言葉は小松 [8] から引用した．

定義 1.6 (截線領域，截線写像)**.** $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $z = z(t)$ で，$t \in [0, t_0)$ で連続，$z(0) = z_0$ かつ $\lim_{t \to t_0} |z(t)| = +\infty$ を満たすものを z_0 から無限遠点 ∞ を結ぶ曲線の方程式という．$\Gamma \subset \mathbb{C}$ を，ある点 $z_0 \in \mathbb{C}$ から ∞ を結ぶある単純閉曲線とする．このとき，単連結領域 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ を截線領域という．さらに，$\mathbb{D}$ 上正則かつ $\mathbb{D}$ からある截線領域への全単射である関数を截線写像という．

次の定理 1.7 を証明するために Carathéodory の核収束定理が用いられる．

定理 1.7. $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ を截線写像の族とする．このとき，各 $g \in \mathcal{S}^*$ に対してある $\mathbb{D}$ 上で正則な関数 h で，$h(0) = 0$ かつ $\mathbb{D}$ 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{g(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる．h の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

と表すとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$$

が成り立つならば，Milin 予想は真である．

定理 1.7 によって，部分族 $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ に対して Milin 予想の結論の不等式 (1.1) が成り立つことを証明すれば Bieberbach 予想が証明されることになる．つまり，族 $\mathcal{S}$ 自身ではなく，$\mathcal{S}$ よりも条件を少し強くした部分族 $\mathcal{S}^*$ について考えればよいということになる．

2 核収束定理の証明の準備

以下，Carathéodory の核収束定理の証明に関連する重要な定理と，それらの定式化に必要な定義について記載している．

2.1 単葉関数論からの準備

定理 2.1 (Riemann の写像定理)**.** 任意の単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ と任意の点 $z_0 \in \Omega$ に対して，Ω から $\mathbb{D}$ への全単射である正則関数 f で，$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$ を満たすものが唯 1 つ存在する．

定理 2.2 (Koebe の 1/4 定理)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．このとき，$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(\mathbb{D})$ が成り立つ．

定理 2.3 (Koebe の歪曲定理)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．このとき，すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して，

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

が成り立つ．

2.2 Vitali の定理と Montel の定理

定義 2.4. $\mathcal{F}$ はある開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上で定義された関数の族とする．

1. $E \subset \Omega$ とする．このとき，ある定数 $M > 0$ が存在し，すべての $z \in E$ とすべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つとき，$\mathcal{F}$ は E 上一様有界であるという．

2. 任意の有界閉集合 $K \subset \Omega$ に対して $\mathcal{F}$ が K 上一様有界であるとき，$\mathcal{F}$ は Ω 上広義一様有界であるという．

3. 任意の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対して $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列で Ω 上広義一様収束するものが存在するとき，$\mathcal{F}$ は Ω で正規族であるという．

定理 2.5 (Montel の定理)**.** $\mathcal{F}$ はある開集合 Ω 上で正則な関数の族とする．このとき，$\mathcal{F}$ が Ω 上広義一様有界であるならば，$\mathcal{F}$ は Ω で正規族である．

定理 2.6 (Vitali の定理)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある領域 Ω 上正則な関数の列で，$A \subset \Omega$ は $A^d \cap \Omega \neq \emptyset$ を満たすものとする．ここで，A^d は A の集積点全体のなす集合である．また，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω で正規族であり，ある部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，Ω 上ある関数 g に広義一様収束するものが存在し，さらに $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が A 上 g に各点収束すると仮定する．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上広義一様収束する．

3　Carathéodory の核収束定理と証明の概要

本章ではまず Carathéodory の核収束定理を定式化するために必要な概念である領域の核と核収束を定義し，その例をいくつか与える．その後，Carathéodory の核収束定理の定式化と証明について説明する．

3.1　領域の列の核と核収束の定義とその例

定義 3.1 (領域の列の核，核収束)**.** $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in D_n$ を満たすある領域の列とする．集合 D' を次で定める：

$$D' := \{w \in \mathbb{C} \mid \{0, w\} \subset H \text{ を満たすある領域 } H \text{ が存在し，}$$
$$\text{十分大きなすべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } H \subset D_n\}.$$

このとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D を，

$$D := \{0\} \cup D'$$

によって定義する．$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての部分列が $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ と同じ核 D をもつとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D に核収束するといい，$D_n \to D$ と書く．

注意 3.2. $D' = \emptyset$ のとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は $D = \{0\}$ である．

例 3.3. (i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \left\{1 + it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．このとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は，

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z < 1\}$$

である．さらに，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので，$D_n \to D$ である．

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \left\{it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．すると，どのように $\varepsilon \in (0, 1)$ をとってきてもある $n_0 \in \mathbb{N}$ で，$B(0, \varepsilon) \not\subset D_{n_0}$ となってしまうので，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は $D = \{0\}$ である．さらに，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので，$D_n \to D$ である．

(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z = (-1)^n\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．すると，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は，

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > -1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 1\}$$

だが，部分列 $\{D_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ の核は，

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 1\}$$

となってしまい，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D に核収束しない．

3.2 Carathéodory の核収束定理と証明の概要

核収束定理については様々な文献に結果と証明が書かれている．それらの中でも特に [3], [9] は単葉関数論の古典的な名著であり，[5], [6], [10] は Bieberbach 予想の証明についても解説がある．これら 5 つの文献を調べたところ，以下のような不明瞭な部分が見つかった．

· 関数列と領域の列の評価について（Vitali の定理，Riemann の写像定理の一意性）．

· 単連結領域の列の核は単連結領域であるか．

さらに，Carathéodory の核収束定理は今回参考にした 5 つの文献には必要十分条件の形で 1 つの定理として書かれていた．一方の証明に他方の結論を用いることを強調するために，私は以下の 2 つの定理に分けて定式化した．定理 3.4，定理 3.5 は [7] による．

定理 3.4. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である関数の列で，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ を満たすとする．$f_n(\mathbb{D}) = D_n$ と表し，領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上ある関数 f に広義一様収束するならば，$f(\mathbb{D}) = D$ である．

定理 3.5. $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n \subsetneq \mathbb{C}$ かつ $0 \in D_n$ を満たすある単連結領域の列とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上正則なある関数の列で，$\mathbb{D}$ から D_n への全単射で，$f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ を満たすとする．$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする．このとき，以下が成立：

(i) $D_n \to D$ かつ $D = \{0\}$ であるならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 0 に広義一様収束する．

(ii) $D_n \to D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ が単連結領域であるならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上定数でないある関数 f に広義一様収束し，$f(\mathbb{D}) = D$ である．

参考にした 5 つの文献には，定理 3.5 の証明に関する内容について，先程述べたような不明瞭な部分があった．私は Step3，Step4 でそれらを改善した．Step3 で Riemann の写像定理の写像の一意性と定理 3.4 を用いる．Step4 では定理 2.6(Vitali の定理) と定理 3.4 を用いる．本発表では，定理 3.5 の証明の概要を説明するが，以下には自己完結した証明を記載しておく．

定理 3.5 の証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n'(0) > 0$ より，$\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である関数

$$F_n(z) := \frac{f_n(z)}{f_n'(0)}$$

を定義できる．$F_n(0) = 0$, $F_n'(0) = 1$ より，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ である．

(i) の証明 : Step1. $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 0$ を示す．もし 0 に収束しないと仮定すると，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても，ある $n_0 \geq n$ で，$f_{n_0}'(0) \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する．つまり，

$$\begin{gathered}
1\text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在して}, f_{n_1}'(0) \geq \varepsilon \\
n_1\text{に対してある番号 } n_2 > n_1\text{が存在して}, f_{n_2}'(0) \geq \varepsilon \\
\vdots \\
n_{k-1}\text{に対してある番号 } n_k > n_{k-1}\text{が存在して}, f_{n_k}'(0) \geq \varepsilon
\end{gathered}$$

を満たす $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．ここで，各 F_{n_k} に対して定理 2.2(Koebe の 1/4 定理) を用いると，

$$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset F_{n_k}(\mathbb{D})$$

が成り立つ．ここで，$w \in B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right)$ を任意にとると，$|w| < \frac{f_{n_k}'(0)}{4}$, $\frac{|w|}{f_{n_k}'(0)} < \frac{1}{4}$ である．これより，ある $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在して，

$$\frac{w}{f_{n_k}'(0)} = F_{n_k}(z_0) = \frac{f_{n_k}(z_0)}{f_{n_k}'(0)}$$

と表される．つまり，$w = f_{n_k}(z_0)$ となる．したがって，

$$B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ．これより，

$$B\left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

で，$\{D_{n_k}\}$ の核は少なくとも $B(0, \frac{\varepsilon}{4})$ を含んでしまい，$D_n \to \{0\}$ であることに矛盾する．

Step2. 広義一様収束することを示す．有界閉集合 $K \subset \mathbb{D}$ を任意にとる．関数 $\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ は K 上で連続なので，$M_1 := \max_{z\in K} \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ が存在する．各 F_n に対して定理 2.3(Koebe の歪曲定理) を用いると，K 上

$$|F_n(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq M_1$$

が成り立つ．これより，

$$|f_n(z)| = |F_n(z)||f_n'(0)| \leq |f_n'(0)|M_1 \to 0 \ (n \to +\infty)$$

となるので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 0 に広義一様収束する．

(ii) の証明 : Step1. $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示す．$\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界でないと仮定する．このとき，部分列 $\{f_{n_k}'(0)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(0) = +\infty$ を満たすものが存在する．各 F_{n_k} に対して定理 2.2(Koebe の 1/4 定理) を用いると，(i) の Step1 の証明内の議論から，

$$B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ．いま，$f_{n_k}'(0) \to +\infty \ (k \to \infty)$ であるので，$\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ を核にもつ．これは $D_n \to D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ に矛盾する．よって，$\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．

Step2. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族であることを示す．Step1 より，ある定数 $M_2 > 0$ が存在し，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n'(0)| \leq M_2$ が成り立つ．各 F_n に対して定理 2.3(Koebe の歪曲定理) を用いると，すべての $z \in K$ に対して，

$$\begin{aligned}|F_n(z)| &\leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \\ |f_n(z)| &= |F_n(z)||f_n'(0)| \\ &\leq M_1 M_2\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は K 上一様有界であるので，定理 2.5(Montel の定理) より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族である．

Step3. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族であるので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\mathbb{D}$ 上広義一様収束するものが存在する．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数を g とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束することを示す．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上各点収束しないと仮定する．すると，ある $\alpha \in \mathbb{D}$ と $\varepsilon > 0$ が存在し，どのように $N \in \mathbb{N}$ をとってきても，ある番号 $n > N$ で，$|f_n(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する．つまり，

$$\begin{gathered}1\text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在し}, |f_{n_1}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \\ n_1\text{に対してある番号 } n_2 > n_1\text{が存在し}, |f_{n_2}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \\ \vdots \\ n_{k-1}\text{に対してある番号 } n_k > n_{k-1}\text{が存在し}, |f_{n_k}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon\end{gathered}$$

を満たす部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．再び $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ で正規族であることを用いると，$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ で，$\mathbb{D}$ 上広義一様収束するものが存在する．$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ の極限関数を f とする．さらに，すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$$

を満たしているので，

$$\lim_{l \to \infty} f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha) \neq 0$$

つまり $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ である．一方，$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して定理 3.4 を用いると，$f(\mathbb{D}) = D$ かつ $g(\mathbb{D}) = D$ である．また，

$$f(0) = \lim_{l \to \infty} f_{n_{k_l}}(0) = 0$$

であり，Weierstrass の定理より，$\{f_{n_{k_l}}'(0)\}_{l=1}^{\infty}$ は $f'(0)$ に収束するので，

$$f'(0) = \lim_{l \to \infty} f_{n_{k_l}}'(0) \geq 0$$

となる．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上正則かつ単射なので，f も $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である．したがって，$\mathbb{D}$ 上で $f'(z) \neq 0$，つまり $f'(0) > 0$ である．同様にして，$g(0) = 0$ かつ g は $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射で，$g'(0) > 0$ である．このことと，f, g は $\mathbb{D}$ 上正則かつ $\mathbb{D}$ から単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ への全単射なので，Riemann の写像定理の写像の一意性より，すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z) = g(z)$ となってしまい，$f(\alpha) \neq g(\alpha)$ に矛盾する．よって，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束する．

Step4. 定理の結論を示す．Step3 より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束するので，定理 2.6(Vitali の定理) より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上広義一様収束する．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して定理 3.4 を用いると，$g(\mathbb{D}) = D$ となる． $\square$

参考文献

[1] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. **38** (1916), 940–955.

[2] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. **154** (1985), 137–152.

[3] P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 259. Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] C. H. Fitzgerald and Ch. Pommerenke, The de Branges theorem on univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 683–690.

[5] S. Gong, The Bieberbach Conjecture, Translated from the 1989 Chinese original and revised by the author. With preface by Carl H. FitzGerald. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 12. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 1999.

[6] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis Volume 3: Discrete Fourier analysis–Cauchy integrals–construction of conformal maps–univalent functions, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

[7] M. Izuki and T. Koyama, An elementary proof of the Carathéodory kernel convergence theorem, Azerbaijan Journal of Mathematics, **8** (2018), to appear.

[8] 小松勇作, 等角写像論 上巻, 共立出版株式会社, 1949.

[9] Ch. Pommerenke, Univalent Functions with a chapter on Quadraic Differentials by Gerd Jensen, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[10] S. L. Segal, Nine Introductions in Complex Analysis. Revised Edition, North-Holland Mathematics Studies, 208. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2008.