q 超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形

朴　佳南　(Kanam PARK)*

概　　要

q 超幾何級数は, ガウスの超幾何級数の q 類似として, 19 世紀に Heine によって導入された. この q 超幾何級数は, ハイネの公式と呼ばれる等式を満たし, 定積分の q 類似であるジャクソン積分によって表されることが知られている. 本講演では, q 超幾何級数の拡張 $\mathcal{F}_{M,N}$ を定義し, ハイネの公式の拡張, そして $\mathcal{F}_{N,M}$ で表される特殊解を持つモノドロミー保存変形の, $N=1$ の場合について話す.

1. q 超幾何関数

q 超幾何級数は, ガウスの超幾何級数の q 類似として導入された. ガウスの超幾何級数とは次のような式である.

定義 1.1 (ガウスの超幾何級数)**.** ガウスの超幾何級数は, 次で定義される

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n, |x|<1. \tag{1}$$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ である.

(1) の q 類似として定義される q 超幾何級数とは次のような式である

定義 1.2 (q 超幾何級数)**.** q 超幾何級数は, 次で定義される [1][2]

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(q)_n}x^n, |x|<1. \tag{2}$$

ここで, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^n a)_\infty}$ である.

ここで, q 超幾何関数 (2) の重要な性質である, ハイネの公式と積分表示を紹介する. まず, ハイネの公式とは次のような等式である.

命題 1.1 (ハイネの公式)**.** (2) は, 次の等式を満たす

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}x\right)=\frac{(b)_\infty(ax)_\infty}{(c)_\infty(x)_\infty}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\frac{c}{b},x\\ ax\end{matrix}b\right). \tag{3}$$

この証明は, 二項定理の q 類似である q-二項定理と, 和の順序交換をすることで示される. ここで, q-二項定理とは次のようなものである

定理 1.1 (q-二項定理)**.** 次の等式が成り立つ

$$\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}=\sum_{m\geq 0}\frac{(a)_m}{(c)_m}z^m. \tag{4}$$

神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程 1 年

* 〒657-8501　神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科

e-mail: kpaku@math.kobe-u.ac.jp

次に, (2) の積分表示について述べる. 定積分の q 類似であるジャクソン積分は次のように定義される.

定義 1.3 (Jackson 積分)**.**

$$\int_0^c f(t)d_qt = c(1-q)\sum_{n\geq 0} f(cq^n)q^n. \tag{5}$$

$q\to 1$ のとき, この和はリーマン積分に移行する. これを用いると, (3) は, 次のように積分表示として解釈される.

命題 1.2 (q 超幾何関数の積分表示)**.** (3) に対して, $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$, $c=q^\gamma$ と代入すると, (3) は次のような式になる

$${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^\alpha, q^\beta \\ q^\gamma \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}\frac{(qt)_\infty(q^\alpha xt)_\infty}{(q^{\gamma-\beta}t)_\infty(xt)_\infty}d_qt, \tag{6}$$

ここで, $\Gamma_q(x)=\frac{(q)_\infty}{(q^x)_\infty}(1-q)^{1-x}$ である.

2. q 超幾何関数の拡張

1 でみた q 超幾何関数の拡張を考える. (2) の拡張として, 関数 $\mathcal{F}_{M,N}$ を次のように定義する.

定義 2.1 (q 超幾何級数の拡張 $\mathcal{F}_{M,N}$)**.**

$$\mathcal{F}_{M,N}\left(\begin{matrix} \{a_i\}, \{b_j\} \\ \{c_i\} \end{matrix}; \{y_j\}\right) = \sum_{n_j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(a_i)_{|n|}}{(c_i)_{|n|}}\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j)_{n_j}}{(q)_{n_j}}\prod_{j=1}^{N} y_j^{n_j}. \tag{7}$$

ここで, $|n|=\sum_{j=1}^{N} n_j$, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^na)_\infty}$ を表す.

$M=1$, $N=1$ のとき, (7) は (2) に相等する. (3), (6) に対応するように, 定義した関数 $\mathcal{F}_{M,N}$ において, 次の等式がなりたつ.

命題 2.1 (ハイネの公式の拡張)**.**

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{y_j\}, \{a_i\} \\ \{b_jy_j\} \end{matrix}; \{x_i\}\right) = \frac{(\{y_j\}, \{a_ix_i\})_\infty}{(\{b_jy_j\}, \{x_i\})_\infty}\mathcal{F}_{M,N}\left(\begin{matrix} \{x_i\}, \{b_j\} \\ \{a_ix_i\} \end{matrix}; \{y_j\}\right). \tag{8}$$

この証明は, 命題 1.1 と同様に, 定理 1.1 と和の順序交換によって示される. (8) により, 関数 $\mathcal{F}_{N,M}$ に対して, (6) と同様にして次を得る.

命題 2.2 ($\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示)**.** (8) に対して, $a_i=q^{\alpha_i}$, $b_j=q^{\beta_j}$, $y_j=q^{\gamma_j}$ を代入すると, (8) は次のような式になる

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{q^{\gamma_j}\}, \{q^{\alpha_i}\} \\ \{q^{\beta_j}q^{\gamma_j}\} \end{matrix}; \{x_i\}\right) = \\ &\quad \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_q(\beta_j+\gamma_j)}{\Gamma_q(\beta_j)\Gamma_q(\gamma_j)}\prod_{j=1}^{N}\int_0^1 d_qt_j\prod_{j=1}^{N}\frac{(qt_j)_\infty}{(q^{\beta_j}t_j)_\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(x_iq^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{N}t_j)_\infty}{(x_i\prod_{j=1}^{N}t_j)_\infty}t_j^{\gamma_j-1}.\end{aligned} \tag{9}$$

3. $\mathcal{F}_{1,M}$ が満たすモノドロミー保存変形

Tsuda[5] は, 微分の場合に, 次のようなハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$(H_j はある $\{p_n^{(i)}, q_n^{(i)}\}$ の多項式)

$$\mathcal{H}_{L,N}: \quad \frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \begin{pmatrix} 1 \leq i, j \leq N \\ 1 \leq n \leq N+1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

の特殊解を, 次のガウスの超幾何関数の拡張式 $F_{L,N}$

$$F_{L,N} = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha_1)_{|m|} \cdots (\alpha_{L-1})_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|m|} \cdots (\gamma_{L-1})_{|m|} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_N}} x^m \tag{11}$$

$$\{|x_1| < 1, \cdots |x_N| < 1\} \subset \mathbb{C}^N, \tag{12}$$

で求めた. まず, $F_{L,N}$ の積分表示を用いてパフ系を構成し, 次に $\mathcal{H}_{L,N}$ のラックス形式を見ると, それが $F_{L,N}$ が満たすパフ系に帰着するので, $F_{L,N}$ で $\mathcal{H}_{L,N}$ の特殊解を表せることがわかる. 今回定義した $\mathcal{F}_{M,N}$ は, この $F_{L,N}$ の q 類似 $(M = L-1)$ であり, 我々の目標は, (10) の q 類似を得ることである. これについて, $N = 1$ の場合の結果を得たので, 本稿ではそれについて述べる.

3.1. $\mathcal{F}_{1,M}$ が満たすパフ系

まず, $\mathcal{F}_{1,M}$ の積分表示を用いて, それが満たすパフ系を構成する. (9) の $N = 1$ における被積分関数を, Φ とおく $(t_1 = u_1)$

$$\Phi = u_1^{\gamma_1} \prod_{i=1}^{M} \frac{a_i x_i u_1}{x_i u_1} \quad (x_0 = b_1,\ a_0 x_0 = q). \tag{13}$$

これに対して

$$\Phi p_0,\ \Phi p_{1,i},\ (1 \leq i \leq M) \tag{14}$$

の u_1 に関する積分が, パフ系の解の基底になる. ここで, $p_0 = 1$, $p_{1,i} = (1 - b_1 u_1) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1 - x_k u_1}{1 - a_k x_k u_1} \cdot \frac{1}{1 - a_i x_i u_1}$ である. それぞれ Ψ_0, $\Psi_{1,i}$ $(1 \leq i \leq M)$ で表し, 互換 $\sigma_i = \{x_i \leftrightarrow x_{i+1}, a_i \leftrightarrow a_{i+1}\}$ とおくと, 次が成り立つ

$$\sigma_i \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{1,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_i - a_{i+1} x_{i+1}} \begin{bmatrix} (1 - a_i) x_i & a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & (1 - a_{i+1}) x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{1,i+1} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\sigma_i(p_{1,k}) = p_{1,k} (k \neq i, i+1). \tag{16}$$

また, 変数 x_M の q シフト $(T_{x_M}(f(x_M)) = f(q x_M))$ に対して, 次が成り立つ

$$T_{x_M}(\Phi p_0) = \Phi \frac{1 - x_M u_1}{1 - a_M x_M u_1} = (1 - 1/a_1) \Phi \rho(p_{1,1}) + 1/a_1 \Phi \rho(p_0), \tag{17}$$

$$T_{x_M}(\Phi p_{1,i}) = \Phi \frac{1 - x_M u_1}{1 - a_M x_M u_1} p_{1,i} = \Phi \rho(p_{1,i+1}),\ (1 \leq i \leq M-1) \tag{18}$$

$$T_{x_M}(\Phi p_{1,M}) = q^{-\gamma_1} \Phi \frac{1 - b_1 u_1}{1 - a_M x_M u_1} = q^{-\gamma_1} \Phi \rho(p_{1,1}). \tag{19}$$

ここで, $\rho = \sigma_{M-1} \sigma_{M-2} \cdots \sigma_1$ とおくと, (15)-(19) より, 次が言える.

命題 3.1. 関数 $\mathcal{F}_{1,M}$ は, 次のパフ系を満たす [3]

$$T_{x_M}(\Psi_0) = \frac{x_M - b_1}{a_M x_M - b_1}\ \rho(\Psi_0) + \frac{(a_M - 1)x_M}{a_M x_M - b_1}\rho(\Psi_{1,1}), \tag{20}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,i}) = \rho(\Psi_{1,i+1})\ (1 \leq i \leq M-1), \tag{21}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,M}) = \frac{q^{-\gamma_1}(1 - b_1)}{a_M x_M - b_1}\left[\rho(\psi_0) + \frac{a_M x_M - 1}{1 - b_1}\rho(\Psi_{1,1})\right]. \tag{22}$$

x_M 以外の変数に対する q シフトは, 置換 σ_i を用いることによって求められる.

3.2. $\mathcal{F}_{1,M}$ **が満たすモノドロミー保存変形**

$\mathcal{F}_{1,M}$ は上のパフ系を満たすので, その係数行列は両立条件を満たす. このことから, それを特殊化し, 簡約したものをあるモノドロミー保存変形のラックス形式と解釈して目標の方程式を得る.

定理 3.1. 行列 A, B を

$$A = dX_1^{-1}X_2 \cdots X_{2M-1}^{-1}X_{2M}, \tag{23}$$

$$B = X_{2M}(z/q, t)^{-1} \cdot X_{2M-1}(z/q, t), \tag{24}$$

とする. ただし, d は対角行列, $X_i = X_i(z,t) = \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ z & c_i/u_i \end{pmatrix}$ とする. このとき

$$A(z,t) \cdot B(qz,t) = B(z,t) \cdot A(z,qt), \tag{25}$$

によって定まるモノドロミー保存変形 [1] は, $\mathcal{F}_{1,M}$ で表される特殊解を持つ.

証明の概要を述べる. $\mathcal{F}_{1,M}$ の積分表示から得られるパフ系の係数行列が, (23),(24) のように表されることが分かれば良い. ここで, 命題 3.1 において, $\overrightarrow{\Psi} = (\Psi_0, \cdots, \Psi_{1,M})$ とおき, 行列で次のような積の形で表すことができる

$$T_{x_M}\overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi}A, \tag{26}$$

$$A = R_{M-1}R_{M-2}\cdots R_1 Q_M. \tag{27}$$

ここで, 行列 R_i, Q_M は $(M+1)$ 次正方行列で, それぞれ作用素 σ_i, T_{x_M} より導かれる行列である. これに対して, パラメーター $a_M = 1$ と特殊化すると同時に, $x_M = z$ とおくと, (27) における因子は, 次のようになる

$$R_i = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & \cdots & i & i+1 & i+2 & i+3 & \cdots & M+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ i+2 \\ i+3 \\ \vdots \\ M+1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{(1-a_i)x_i}{x_i - z} & 1 & & & \\ & & & \frac{a_i x_i - z}{x_i - z} & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{28}$$

[1] q-KP の相似簡約のラックス形式 [4] を変形して構成したもの

$$
Q_M = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & M & M+1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ M+1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{q^{-\gamma_1}(1-b_1)}{z-b_1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-q^{-\gamma_1}(z-1)}{z-b_1} \\
0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{29}
$$

また, このとき, パフ系 (20)-(22) における未知関数 Ψ_0, Ψ_1, $\cdots$,Ψ_M のうち,Ψ_M だけが z に依存する. そこで, 他の関数の比 $\frac{\Psi_1}{\Psi_0}, \cdots \ \frac{\Psi_{M-1}}{\Psi_0}$ を $x_1, \cdots, x_{M-1}$ にのみ依存する関数としてそれぞれ r_1, r_2, $\cdots$ r_{M-1} とおくと, 式 (26), (27) は Ψ_0 と Ψ_M だけの連立方程式として, 次のように表すことができる

$$
T_z(\Psi_0, \Psi_M) = (\Psi_0, \Psi_M)\ d'Y_1^{-1}Y_2 \cdots Y_{2M-1}^{-1}Y_{2M}, \tag{30}
$$

ここで, d' は対角行列で, $i = 1, \cdots M-1$ において

$$
Y_{2i-1} = \begin{pmatrix} \frac{q^{\gamma_1}}{r_{M-i}} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1}x_{M-i}r_{M-i} \end{pmatrix}, \quad Y_{2i} = \begin{pmatrix} \frac{q^{\gamma_1}}{r_{M-i}} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1}x_{M-i}a_{M-i}r_{M-i} \end{pmatrix}, \tag{31}
$$

最後 2 つの因子は

$$
Y_{2M-1} = \begin{pmatrix} q^{\gamma_1} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1}b_1 \end{pmatrix}, \quad Y_{2M} = \begin{pmatrix} q^{\gamma_1} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1} \end{pmatrix}. \tag{32}
$$

これと (23) を見比べて, 結果を得る (行列 B も同様).

参考文献

[1] E.Heine., *Uber die Reihe...*, Reine.Angew.Math., **32** (1846), 210–212.

[2] E.Heine., *Untersuchungen uber die Reihe...*, Reine.Angew.Math., **34** (1847), 285–328.

[3] Mimachi K.,*Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type*,Nagoya.Math.J.,**116**(1989),149–161

[4] Kajiwara K.,Noumi M., and Yamada Y., *q-Painleve systems arising from q-KP hierarchy*, Lett. Math. Phys. **62**(2002),259–268

[5] Tsuda T., *Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type*, Quart. J. Math, **63** (2012), 489–505.