p-優調和関数への CARLESON 評価について

原 宇信 (TAKANOBU HARA)
北海道大学大学院理学研究院数学部門 学術研究員

Abstract. p 乗 Dirichlet 積分の Euler-Lagrange 方程式としてあらわれる p-ラプラス方程式に外力をつけて考察する. 領域内部での正値解の挙動は外力の Wolff ポテンシャルで両側から各点評価されることがわかっている. 本講演では, 正値優解の領域近傍での大域的可積分性と, 境界で消える解の境界近傍での各点評価について取り扱う.

1. 序

Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の領域とし, 指数 $1 < p < \infty$ を固定する. Ω 上で p 乗 Dirichlet 積分の Euler-Lagrange 方程式である p-Laplace 方程式とその弱優解 u を考える. 正の超関数は測度として表現できるので, ある測度 $\mu \in W^{-1,p'}(\Omega)$ が存在して u は方程式

$$-\triangle_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \mu \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

の弱解となる. 以下では各点評価を取り扱うため, 下半連続修正された弱優解のみを考える.

次の Harnack の不等式が知られている: u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の弱解とする. このとき n と p にのみ依存する定数 C が存在して $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ となる任意の球 $B(x_0, R)$ に対し

$$u(x_0) \leq C \inf_{B(x_0,R)} u.$$

Harnack の不等式は領域内部での評価であり, 一般に境界に触れる集合上では類似の評価は成り立たない. しかしながら, Ω 内部への適当な条件のもとで, 境界で消える解に対して Carleson 評価と呼ばれる類似の評価が成り立つ. 実際, 2005 年, Aikawa と Shanmugalingam は距離測度空間の一様領域 (定義 3.6 参照) 上の p-調和関数に対する次の評価を得た. 特に有界 Lipschitz 領域は一様領域であることに注意する.

定理 1.1 ([1])**.** Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y, \partial\Omega)/R$ とする. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の有界かつ非負の解で $u = 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ を quasi-everywhere にみたすものとする. このとき n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $x_0 \in \Omega \cap B(\xi, \theta R/4)$ に対して

$$u(x_0) \leq C \inf_{B(y,\theta R/5)} u.$$

他方, 1994 年, Kilpeläinen と Malý は次の一般の弱優解に対する領域内部での各点評価を得た.

定理 1.2 ([5])**.** u を $-\triangle_p u = \mu$ in Ω の非負の弱解とする. $x_0 \in \Omega$ とし $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ とする. このとき, n と p にのみ依存する定数 C が存在して

$$u(x_0) \leq C \left(\inf_{B(x_0,R)} u + \mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, 2R) \right).$$

ただし $\mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, 2R)$ は

$$\mathbf{W}_p^{\mu}(x, R) = \int_0^R \left(\frac{\mu(B(x,s))}{s^{n-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

で定義される μ の Wolff ポテンシャル.

$p=2$ の場合, 方程式の線型性を用いると, 2 つの不等式を組み合わせた形の弱優解に対する境界近傍での各点評価も正しいことがわかる. 実際, このとき Riesz の分解定理から u は非負の調和関数 h と Ω の Green 関数 $G(x,y)$ を用いて

$$u(x)=h(x)+\int_\Omega G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

と表示される. また, $p=2$ のとき, Fubini の定理から Wolff ポテンシャルは Newton ポテンシャルの形に書き換えることができ, Green ポテンシャルを上から評価できる. したがって h に対して Carleson 評価を用いることで求める不等式が得られる. しかし, $p\neq 2$ の場合, 方程式 (1) は線型ではなく, このような解の分解や表示公式は成り立たない.

2. 主結果

$p\neq 2$ の場合も含めてこれら 2 つの定理が組み合わさった形の定理を得た [3].

定理 2.1. Ω を一様領域とし, $\xi\in\partial\Omega$ とする. $y\in\Omega$ とし, $R=|\xi-y|$, $\theta=d(y,\partial\Omega)/R$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi,2R))$ に属するという意味で $u\leq 0$ on $\partial\Omega\cap B(\xi,2R)$ かつ $\mu(B(\xi,2R))$ が有限になるものとする. このとき n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $x_0\in\Omega\cap B(\xi,\theta R/4)$ に対して

$$u(x_0)\leq C\left(\inf_{B(y,\theta R/5)}u+\mathbf{W}_p^\mu(x_0,R)\right).$$

証明のため, Harnack の不等式 (1) の証明に立ち返る. 証明は 2 つの部分に分かれていた. まず, u が $-\triangle_p u=0$ の非負の弱優解のとき, 弱 Harnack 不等式と呼ばれる積分評価 (補題 3.1) がある $s>0$ に対して成り立つ. 他方, u が $-\triangle_p u=0$ の弱劣解のとき, 各 $s>0$ に対して u に対して劣平均値の不等式型の上からの各点評価

$$u_+(x_0)\leq C\left(\fint_{B(x_0,R)}u_+^s\,\mathrm{d}x\right)^{1/s} \tag{2}$$

が成り立つ. ここで $f_+=\max\{f,0\}$, $\fint_A f\,\mathrm{d}x=|A|^{-1}\int_A f\,\mathrm{d}x$. 2 つの不等式を組み合わせて $-\triangle_p u=0$ の非負の解に対する Harnack の不等式が得られる. 定理 1.1, 1.2 の証明の方針も, この 2 つの部分からなることは変わらない. そこで我々は次の二段階に分けて定理 2.1 を行う. まず, 領域が一様領域であることと領域内部では弱 Harnack 不等式が成り立つことを利用し定理 1.1 の境界近傍での積分評価は $-\triangle_p u=0$ の非負の弱優解に対しても成り立つことを示す (Section 3). 次に境界上で u が消えていることを利用し定理 1.2 の劣平均値型の各点評価を領域境界を超えて拡張する (Section 4). 2 つの評価を組み合わせて, 求める定理 2.1 が得られる.

3. 大域的積分評価

p-Laplace 方程式についての弱 Harnack 不等式はよく知られている (たとえば, [4, Theorem 3.59]).

補題 3.1. u を $-\triangle_p u=0$ in Ω の非負の弱優解とする. このとき n と p から定まる正数 s と定数 C が存在して $B(x_0,2R)\subset\Omega$ となる任意の球 $B(x_0,R)$ に対し

$$\left(\fint_{B(x_0,R)}u^s\,\mathrm{d}x\right)^{1/s}\leq C\inf_{B(x_0,R)}u.$$

この不等式, および [1] と [6] の方法を用いて大域的積分評価 (定理 3.8) を証明する. 証明のため, 領域境界から距離の離れた球の鎖を考え, 弱 Harnack の不等式 (補題 3.1) を繰り返し用いる. 鎖の長さを制御するのが次の擬双曲距離である.

定義 3.2. Ω を $\partial\Omega \neq \emptyset$ となる領域とする. $x, y \in \Omega$ の擬双曲距離 $k_\Omega(x,y)$ を

$$k_\Omega(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{d(z(s), \partial\Omega)}$$

で定義する. ただし, 下限は x と y を結ぶ Ω 内の曲線 γ についてとる.

Ω が $\mathbb{R}^2$ 内の連結領域であれば $k_\Omega(x,y)$ は x と y の間の双曲距離と同値になる. 次の条件をみたす球の鎖がとれる ([6, Lemma 0] を参照).

補題 3.3. 任意の $x, y \in \Omega$ に対し次の条件をみたす有限個の球の族 $\{B_i\}_{i=0}^m = \{B(x_i, r_i)\}_{i=0}^m$ が存在する.

(i) 各 i に対し, $r_i = d(x_i, \partial\Omega)/5$).
(ii) $x_0 = x$, $x_m = y$.
(iii) 各 $0 \le i \le m-1$ に対し, $x_{i+1} \in B_i$ かつ $B_{i+1} \subset \frac{11}{5}B_i$.
(iv) $m \le C(n)k(x,y) + 1$.

各 $\frac{11}{5}B_i$ 上で補題 3.1 を用いることで次の不等式を得る.

補題 3.4. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき n と p にのみ依存する定数 A が存在して $5B \subset \Omega$ となる任意の球 B に対して

$$⨍_B u^s \,\mathrm{d}x \le e^{A(k_\Omega(c(B),y)+1)} \inf_{B(y, d(y,\partial\Omega)/5)} u^s.$$

ただし $c(B)$ は B の中心.

この不等式と被覆定理から次の積分評価を得る. ただし, (3) の右辺の積分は一般に収束しないことに注意する.

補題 3.5. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき任意の $0 < \sigma \le 1$ に対し n, p, σ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $\xi \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$ に対して

$$\int_{\Omega\cap B} u^{\sigma s} \,\mathrm{d}x \le \left(C \int_{\Omega \cap \frac{26}{25}B} e^{\sigma A k_\Omega(x,y)} \,\mathrm{d}x \right) \inf_{B(y, d(y,\partial\Omega)/5)} u^{\sigma s}. \tag{3}$$

ただし A は 補題 3.4 の定数.

(3) の右辺の積分の収束のための一つの十分条件は, 領域 Ω が一様領域であることである (例えば [1, Lemma 4.4]). 可積分性のためのより一般的な十分条件については [6] を参照.

定義 3.6. ある定数 c_1 と c_2 で任意の $x, y \in \Omega$ に対して

$$k_\Omega(x,y) \le c_1 \log\left(\frac{|x-y|}{\min\{d(x,\partial\Omega), d(y,\partial\Omega)\}} \right) + c_2$$

となるものが存在するとき, Ω を一様領域とよぶ.

補題 3.7. Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y,\partial\Omega)/R$ とする. このとき, n と c_1 にのみ依存する正数 $\tau > 0$ と, n, c_1, c_2, θ にのみ依存する正数 $C > 0$ が存在して, 任意の $0 < \rho \le \theta R$ に対し

$$\int_{\Omega \cap B(\xi,\rho)} e^{\tau k(x,y)} \,\mathrm{d}x \le C\rho^n.$$

$\sigma = \frac{\tau}{A}$, $\rho = \frac{13}{25}\theta R$ として補題 3.5 と 系 3.7 を組み合わせて次の評価を得る.

定理 3.8. Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y,\partial\Omega)/R$ とする. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき, n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する正数 t_0 と定数 C が存在して

$$\left(\frac{1}{(\theta R)^n} \int_{\Omega \cap B(\xi, \theta R/2)} u^{t_0} \,\mathrm{d}x \right)^{1/t_0} \le C \inf_{B(y, \theta R/5)} u.$$

4. 上からの各点評価

Kilpeläinen と Malý の領域内部での各点評価を, 符号付き外力を伴う方程式に対しての評価に改良した.

補題 4.1 ([2])**.** μ_+ と μ_- を $W^{-1,p'}(\Omega)$ に属する非負の測度とする. u を $-\triangle_p u = \mu_+ - \mu_-$ in Ω の弱解とする. $x_0 \in \Omega$ とし $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ とする. このとき任意の t に対し n, p, t にのみ依存する定数 C が存在して

$$u_+(x_0) \leq C \left\{ \left(\fint_{B(x_0,R)} u_+^t \, \mathrm{d}x \right)^{1/t} + \mathbf{W}_p^{\mu_+}(x_0, 2R) \right\}.$$

境界近傍での各点評価 (定理 4.3) を証明するため, 境界条件 $u = 0$ on $\partial\Omega$ が u に与える影響を外力の形に書き改める. この書き換えにより, 求める境界評価は符号付き外力を伴う方程式の解の内部評価に帰着される. 具体的には, 部分積分公式を近似することにより次の拡張定理を示せる.

補題 4.2. $\xi \in \partial\Omega$, $R > 0$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi, 2R))$ に属するという意味で $u \leq 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ かつ $\mu(B(\xi, 2R))$ が有限になるものとする. このとき $W^{-1,p'}(\Omega)$ に属する非負の測度 ν が存在して

$$-\triangle_p \widetilde{u_+} = \mu\lfloor_{\{u>0\}} - \nu \quad \text{in } B(\xi, R).$$

Remark 4.1. 実際には ν は

$$\int_{B(\xi,R)} \varphi \, \mathrm{d}\nu = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0<u<\epsilon\}} |\nabla u|^p \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B(\xi, R))$$

で与えられる. さらに $p = 2$ かつ $\{u = 0\}$ が滑らかであればその単位外法線ベクトル n と面素 $\mathrm{d}S$ を用いて $\mathrm{d}\nu = -\nabla u \cdot n \, \mathrm{d}S$.

拡張された関数 $\widetilde{u_+}$ に定理 4.1 を用いることで次の評価を得る.

定理 4.3. $\xi \in \partial\Omega$, $R > 0$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi, 2R))$ に属するという意味で $u \leq 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ かつ $\mu(B(\xi, 2R))$ が有限になるものとする. このとき任意の $t > 0$ に対し, n, p, t にのみ依存する定数 C が存在して任意の $0 < r \leq R$ と任意の $x_0 \in \Omega \cap B(\xi, r/4)$ に対して

$$u(x_0) \leq C \left\{ \left(\frac{1}{r^n} \int_{\Omega \cap B(x_0, r/4)} u^t \, \mathrm{d}x \right)^{1/t} + \mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, r/2) \right\}.$$

定理 2.1 の証明. $t = t_0$, $r = \theta R$ として定理 4.3 と定理 3.8 を組み合わせる. □

References

[1] H. Aikawa and N. Shanmugalingam. Carleson-type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces. *Michigan Math. J.*, 53(1):165–188, 2005.

[2] T. Hara. The Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations with signed data. *Manuscripta Math.*, 150(1-2):45–58, 2016.

[3] T. Hara. Carleson-type estimates for p-superharmonic functions. preprint.

[4] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1993 original.

[5] T. Kilpeläinen and J. Malý. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.*, 172(1):137–161, 1994.

[6] D. A. Stegenga and D. C. Ullrich. Superharmonic functions in Hölder domains. *Rocky Mountain J. Math.*, 25(4):1539–1556, 1995.

Department of Mathematics,, Hokkaido University,, Kita 8 Nishi 10 Sapporo, 060-0808, Japan

E-mail address: `takanobu.hara.math@gmail.com`