

分子気体力学による流体中の物体運動の解析

小池 開 (Kai Koike) *

1 序

気体中を物体が運動すると、物体と気体分子は衝突して、運動量をやりとりする。すなわち、物体は気体から力を受ける；一方、その反作用として、気体は乱される。こうして、物体と気体は互いに影響をおよぼしつつ運動する。

この運動を、分子のミクロな運動から理解することはできるだろうか？ Newton の法則にもとづいて分子の力学を記述することは、分子数が膨大なため、骨が折れる；そこで、分子集団を統計的に記述する、分子気体力学の立場でこの問題にとり組んでみる。

次の §2 では、分子気体力学の基本事項を説明する。§3 で、剛体の直線運動を分子気体力学で扱った数学的な研究を紹介する。最後に §4 で、紹介した定理の証明の概略、関連する話題について議論する。

2 分子気体力学の基本事項

この節では、分子気体力学の基本事項を説明する。詳しく学ぶには [16] をおすすめする。

2.1 速度分布関数

分子気体力学では、気体を速度分布関数で記述する。まず、このことを説明しよう。以下では、質量 m の単原子分子からなる理想気体を考える。気体中の微小体積 $\Delta x \subset \mathbb{R}^3$ に着目しよう。この中には多数の気体分子があり、いろいろな速度 $\xi \in \mathbb{R}^3$ で動いている。速度分布関数 $f = f(x, \xi, t)$ (t は時刻) を以下のように定義する： $\Delta \xi$ を速度空間 \mathbb{R}^3 内の微小体積として、

$$m^{-1} \int_{\Delta x \times \Delta \xi} f dx d\xi = \Delta x \text{ 内で速度 } \xi \in \Delta \xi \text{ を持つ分子の (平均) 個数.}$$

気体の種々の巨視量は f を用いて表せる：密度を $\rho = \rho(x, t)$ ，流速を $u = u(x, t)$ ，温度を $T = T(x, t)$ と

* 1) School of Fundamental Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan koike@math.keio.ac.jp 2) Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN, 1-4-1 Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo, 103-0027, Japan kai.koike@riken.jp

すると,

$$\begin{aligned}\rho &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x, \xi, t) d\xi, \\ u &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} \xi f(x, \xi, t) d\xi, \\ 3R_g T &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi - u|^2 f(x, \xi, t) d\xi;\end{aligned}$$

ここで $R_g = \kappa_B/m$ (κ_B は Boltzmann 定数) は (1mol 当りの) 気体定数である. また, 応力 p_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)*¹ は

$$p_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (\xi_i - u_i)(\xi_j - u_j) f(x, \xi, t) d\xi \quad (2.1)$$

と表せる.

2.2 運動論方程式

分布関数 f の時間発展を記述する偏微分方程式を, 運動論方程式 (kinetic equations) という. 典型的には次のように書ける:

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f = a(x, \xi, t); \quad (2.2)$$

ここで $\nabla_x = {}^T[\partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_3}]$ は空間変数に関する勾配を表す. $a = a(x, \xi, t)$ はある関数で, たいていの場合 f にも依存する: $a = a[f](x, \xi, t)$.

もっとも有名な運動論方程式は Boltzmann 方程式で, a は以下のように表せる:

$$\begin{aligned}a &= Q[f, f](x, \xi, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(\xi - \xi', \omega) \{f(x, \eta, t) f(x, \eta', t) - f(x, \xi, t) f(x, \xi', t)\} d\omega d\xi'; \\ \omega &\in \mathbb{S}^2, \quad \eta = \xi - (\xi - \xi')\omega, \quad \eta' = \xi' + (\xi - \xi')\omega;\end{aligned}$$

ここで $B = B(\xi - \xi', \omega)$ は非負の関数で, 分子間相互作用を決めると 1 つ定まる. たとえば, 分子同士が弾性衝突する場合には

$$B(\xi - \xi', \omega) = \sigma_0 |(\xi - \xi') \cdot \omega| \quad (\sigma_0 \text{ は定数})$$

である.

方程式 (2.2) で $a = 0$ とおいたもので記述される気体 (およびその流れ) を自由分子流という (§3.2). §3.3 では Lorentz 気体とよばれる気体と, それに対応する運動論方程式も登場する.

2.3 Maxwell 分布

気体を (乱したりせずに) 放っておくと, 熱平衡状態とよばれる普遍的な状態に近づく (熱力学の第 0 法則). 熱平衡状態を表す速度分布関数は Maxwell 分布とよばれ, 次の形を持つ:

$$f_{\rho, u, T}(\xi) = \frac{\rho}{(2R_g T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\xi - u|^2}{2R_g T}\right);$$

*¹ 微小面積 $\Delta S \subset \mathbb{R}^3$ にかかる力は応力 p_{ij} を用いて表せる: ΔS の単位法線ベクトルを \mathbf{n} , ΔS の速度を u_S と表す. このとき, \mathbf{n} 方向の気体が ΔS におよぼす力の第 i 成分は $-\sum_j [p_{ij} + \rho u_i (u_j - u_{Sj})] n_j \Delta S$. (というより, これが応力の定義である.)

ここで, ρ, u, T は気体の密度, 流速, 温度である (§2.1 参照).^{*2} これは実験事実とおもってもよいが, Boltzmann 方程式から導くこともできる [6, Chap. II.6].

2.4 特性曲線の方法

この節では, 運動論方程式 (2.2) に対する特性曲線の方法を説明する. $\Omega = \Omega(t)$ を気体の占める領域 (開集合) とし, その境界 $\partial\Omega(t)$ の速度を $u_w = u_w(x, t)$, 気体方向の単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, t)$ ($x \in \partial\Omega(t)$) とおこう.

(x, ξ) は $x \in \Omega(t)$, または $x \in \partial\Omega(t)$ かつ $(\xi - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t) < 0$ をみたすとしよう; このとき $x(s; \xi, t) = x - (t - s)\xi$ とおくと, 十分 t に近い $s (< t)$ に対しては, $x(s; \xi, t) \in \Omega(s)$ である. $x(s; \xi, t)$ を (x, ξ) を出発する (後ろ向き) 特性曲線という.

方程式 (2.2) から, 解 f に対して

$$f(x, \xi, t) - f(x(s; \xi, t), \xi, s) = \int_s^t a(x(\sigma; \xi, t), \xi, \sigma) d\sigma$$

が成り立つ; ただし, この式は $x(s; \xi, t) \in \partial\Omega(s)$ をみたす最大の $s (< t)$ を $\tau_1 = \tau_1(x, \xi, t)$ とおくととき,^{*3} $\tau_1 \leq s \leq t$ で成り立つ. もし $\tau_1 \leq 0$ であれば, 初期条件

$$f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi) \quad (2.3)$$

を与えたとき,

$$f(x, \xi, t) = f_0(x(0; \xi, t), \xi) + \int_0^t a(x(s; \xi, t), \xi, s) ds \quad (2.4)$$

である. 一方, $\tau_1 > 0$ の場合には,

$$f(x, \xi, t) - f(x(\tau_1; \xi, t), \xi, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t a(x(s; \xi, t), \xi, s) ds \quad (2.5)$$

が得られるだけで, f と初期条件 (2.3) はまだ結びついていない.

そこで, 式 (2.5) の $f(x(\tau_1; \xi, t), \xi, \tau_1)$ に注目する. τ_1 の定義から

$$x(\tau_1; \xi, t) \in \partial\Omega(\tau_1), \quad (\xi - u_w(x(\tau_1; \xi, t), \tau_1)) \cdot \mathbf{n}(x(\tau_1; \xi, t), \tau_1) > 0$$

である; 従って, $f(x(\tau_1; \xi, t), \xi, \tau_1)$ は境界 $\partial\Omega(\tau_1)$ から飛び出る分子の速度分布である. $f(x(\tau_1; \xi, t), \xi, \tau_1)$ を, 境界 $\partial\Omega(\tau_1)$ に入射する分子の速度分布と関係づけられれば, 式 (2.5) を導いた議論を τ_1 より前の時刻に続けられる. 分子気体力学の境界条件は, まさに境界から飛び出る分子 (反射分子) の速度分布と, 入射する分子の速度分布を結びつける.

2.5 鏡面反射の境界条件

この節では, 運動論方程式 (2.2) の境界条件のひとつ, 鏡面反射の境界条件について説明する. 拡散反射や Maxwell 型の境界条件も重要であるが, 紙数の都合で紹介できない. 他の境界条件については文献 [6, 16] を見てほしい.

^{*2} 熱平衡状態というと, 静止状態 $u = 0$ を想像するかもしれないが, そうとは限らない; たとえば, 等速運動する座標系で静止熱平衡状態を観測した場合, $u \neq 0$ である. $u = 0$ の場合の Maxwell 分布を, 絶対 Maxwell 分布とよぶ.

^{*3} そのような s が存在しなければ, $\tau_1 = -\infty$ とする.

鏡面反射の境界条件は以下の式で与えられる：

$$f(x, \xi, t) = f(x, \xi', t) \quad (x \in \partial\Omega(t), (\xi - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t) > 0, t > 0); \quad (2.6)$$

ただし

$$\xi' = \xi - 2[(\xi - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t)]\mathbf{n}(x, t). \quad (2.7)$$

式 (2.6) に現れる $(\xi - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t) > 0$ という条件は、 ξ が境界 $\partial\Omega(t)$ から飛び出る速度であることを表す；一方、

$$(\xi' - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t) = -(\xi - u_w(x, t)) \cdot \mathbf{n}(x, t) < 0$$

より、 ξ' は境界に入射する速度である。 ξ' の式 (2.7) は以下のような意味を持つ：分子が境界で弾性衝突するとき、速度 ξ' で入射した分子は、速度 ξ で反射する。^{*4} 鏡面反射の境界条件 (2.6) は、分子が境界で弾性衝突することを、分布関数の等式で表したものである。

3 分子気体力学と剛体運動

本稿の主題である、剛体運動の話に入ろう。以下では、数学的な研究について、これまでに知られていることの一部を紹介する。^{*5}

3.1 剛体の直線運動の定式化

この節では、剛体の直線運動の定式化について述べる。

剛体として、“次元” $d = 1, 2, 3$ で区別される 3 種類の形状を考える (図 1)：それぞれ円柱 ($d = 3$)、 x_3 方向に無限に伸びた (厚み有限の) 平板 ($d = 2$)、および x_2, x_3 方向に無限に伸びた (厚み有限の) 平面壁 ($d = 1$) である。 $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d) = (x_1, x_\perp) \in \mathbb{R}^d$ と書き、 x_1 から x_d が貼る平面 \mathbb{R}^d による剛体の断面が

$$C(t) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid X(t) - 1/2 \leq x_1 \leq X(t) + 1/2, |x_\perp| \leq 1\} \quad (3.1)$$

となるよう、^{*6} 剛体の座標系に対する位置、およびその寸法を決める。 $X(t)$ は時間的に変動する未知量である ($X(0) = 0$ とする)。剛体の速度を $V(t) = dX(t)/dt$ と書く。

$V(t)$ の従う運動方程式を説明するために、まず剛体周囲の気体について説明する。

気体は剛体の外側の領域を占め、その状態を分布関数 $f = f(x, \xi, t)$ で記述する (§2.1)。 f の時間発展は運動論方程式 (2.2) に従うとする。また、初期分布は空間一様な Maxwell 分布 (§2.3) とする：

$$f(x, \xi, 0) = f_0(\xi) := \pi^{-3/2} \exp(-|\xi|^2). \quad (3.2)$$

以下、方程式 (2.2) の右辺 $a = a(x, \xi, t)$ は x_{d+1}, \dots, x_3 には依存しないとする；このとき、剛体形状と初期条件 (3.2) の対称性から、 f も x_{d+1}, \dots, x_3 には依存しない。従って $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ 、 $\bar{f}(\bar{x}, \xi, t) = f(x, \xi, t)$ とおくと、 \bar{f} は

$$\partial_t \bar{f} + \bar{\xi} \cdot \nabla_{\bar{x}} \bar{f} = a(\bar{x}, \xi, t) \quad (\bar{x} \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

^{*4} 境界の質量は分子より十分大きく、実質的に無限大とみなせると仮定する。

^{*5} 本稿の性質上、著者の結果が強調された形になることをご容赦いただきたい。

^{*6} $d = 1$ のとき、条件 $|x_\perp| \leq 1$ は無視せよ。

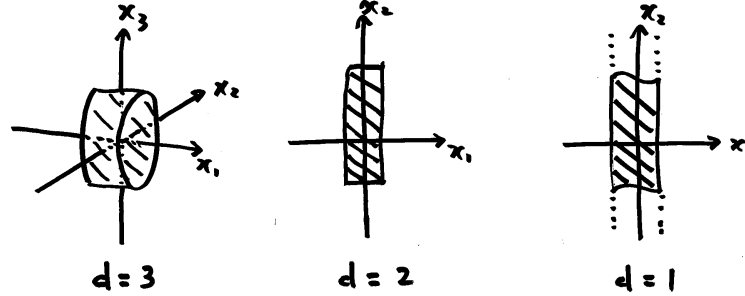


図1 剛体の形状：左から円柱 ($d=3$), 平板 ($d=2$), 平面壁 ($d=1$).

をみます；ここで $\Omega(t) = \mathbb{R}^d \setminus C(t)$, $\nabla_{\bar{x}} = T[\partial_{x_1} \dots \partial_{x_d}]$ である。また、初期条件は

$$\bar{f}(\bar{x}, \xi, 0) = f_0(\xi) := \pi^{-3/2} \exp(-|\xi|^2). \quad (3.3)$$

このことを踏まえ、以下では \bar{x}, \bar{f} をあらためて x, f と書くことにする。

境界条件として、鏡面反射の境界条件 (§2.5) を課す： $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^d$ を x_1 方向の単位ベクトル、 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, t)$ ($x \in \partial C(t)$) を $\partial\Omega(t) = \partial C(t)$ の (気体方向の) 単位法線ベクトルとすると、

$$f(x, \xi, t) = f(x, \xi - 2[(\xi - V(t)\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}, t) \quad (x \in \partial C(t), (\xi - V(t)\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} > 0, t > 0) \quad (3.4)$$

である。

剛体の速度 $V(t)$ の従う運動方程式について説明しよう。

剛体は気体から抵抗力 $D(t)$ を受ける； $D(t)$ は応力の式 (2.1) より

$$D(t) = \int_{\partial C(t)} dS \int \xi_1 (\xi_1 - V(t)) f(x, \xi, t) d\xi$$

と書ける。

$$I^\pm(t) = \{x \in C(t) \mid x_1 = X(t) \pm 1/2\} \times \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 \leq V(t)\} \quad (3.5)$$

とおくと、境界条件 (3.4) を用いて

$$D(t) = 2 \left(\int_{I^+(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f(x, \xi, t) d\xi - \int_{I^-(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f(x, \xi, t) d\xi \right) \quad (3.6)$$

と書き直せる。^{*7}

剛体の速度 $V(t)$ は Newton の法則に従うとする：

$$dV(t)/dt = -D(t), \quad V(0) = \gamma. \quad (3.7)$$

初期速度 γ は正とする。

^{*7} とくに側面からの寄与はないことに注意する。これは側面で起こる分子と剛体の衝突では、分子の x_1 方向の運動量は変化しないことによる。

以上の方程式を解けば、剛体と気体の運動が求まる。 f と V の方程式は両方向に連成していることに注意しよう：境界条件 (3.4) は $V(t)$ を含む；一方，Newton の運動方程式 (3.7) は $D(t)$ の式 (3.6) を通して f を含む。

以下，§§3.2, 3.3 で， $V(t)$ の漸近挙動に関する定理を紹介する。

3.2 剛体速度の漸近挙動：自由分子流の場合

この節では，自由分子流中の剛体運動に関する定理を紹介する。自由分子流とは，分子同士がまったく衝突しないような，極限的に希薄な気体のことである；その支配方程式は，方程式 (2.2) で $a = 0$ とおいた

$$\partial_t f + \bar{\xi} \cdot \nabla_x f = 0 \quad (x \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0) \quad (3.8)$$

である。^{*8}

定理を述べるために，いくつか記号を導入する。

関数 $D_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$D_0(U) = c_d \left(\int_{-\infty}^U (u-U)^2 e^{-u^2} du - \int_U^{\infty} (u-U)^2 e^{-u^2} du \right) \quad (U \in \mathbb{R})$$

と定める；ここで $c_1 = 2\pi^{-1/2}$, $c_2 = 4\pi^{-1/2}$ および $c_2 = 2\pi^{1/2}$ である。このとき簡単な微分計算により， $D_0 = D_0(U)$ は滑らかで（狭義）単調増大な奇関数であり，区間 $[0, \infty)$ で凸であることが分かる [4]。

$0 < \gamma \leq 1$ に対して， $C_0 = D'_0(0)$, $C_\gamma = D'_0(\gamma)$, $t_\gamma = (\log \gamma^{-1})/C_\gamma$ とおく。 D_0 が (区間 $[0, \infty)$ 上で) 単調増大かつ凸であることから， $0 < C_0 < C_\gamma \leq D'_0(1)$ である。

剛体の速度 $V(t)$ の漸近挙動に関して，以下の定理が成り立つ [3]。

Theorem 3.1 (Caprino–Cavallaro–Marchioro). γ が十分小さいとき，方程式 (3.8), (3.3), (3.4)；および方程式 (3.7), (3.6) の解 (f, V) で，次の不等式をみたすものが存在する：

$$V(t) \geq \gamma e^{-C_\gamma t} - \gamma^3 \frac{A_1}{(1+t)^{d+2}}, \quad (3.9)$$

$$V(t) \leq \gamma e^{-C_0 t} - \gamma^5 \frac{A_2}{t^{d+2}} \mathbf{1}_{\{t \geq 2t_\gamma\}}; \quad (3.10)$$

ただし， A_1, A_2 は d のみに依存する正定数， $\mathbf{1}$ は集合の支持関数である。また，任意の解 (f, V) は上の不等式をみたし， $V(t)$ は区間 $[0, t_\gamma]$ で単調減少である。

Remark 3.1. (i) 定理は $V(t)$ が代数的に減衰することを示している： $V(t) \approx Ct^{-(d+2)}$ 。その指数は次元 d に依存する。(ii) 解の一意性は未解決である；上の定理は，少なくとも，漸近挙動の指数 $d+2$ は一意的であることを保証している。(iii) $V(t)$ は符号を変える： $V(t) > 0$ ($t \leq t_\gamma$) かつ $V(t) < 0$ ($t \geq 5t_\gamma$) が不等式 (3.9), (3.10) から従う（必要に応じて γ を小さくする）。

速度に比例する抵抗力を仮定すると， $V(t)$ は指数的に減衰する。すなわち，方程式 (3.7) の代わりに， C_D

^{*8} 右辺は ξ_{d+1}, \dots, ξ_3 に依存しない；そのため， f をこれらの変数に関して積分し，分布関数を簡約化できる。本稿で引用した論文では，この簡約化した分布関数を用いているので，速度変数 ξ も d -次元ベクトルとなっていることに注意してほしい。§3.3 で扱う Lorentz 気体の場合には，この簡約化はできない。

を正定数として

$$dV(t)/dt = -C_D V(t), \quad V(0) = \gamma$$

とすると, $V(t) = \gamma e^{-C_D t}$ である. 上の定理は, このようなシンプルなモデルは漸近挙動を正しく捉えないことを示している.

他の境界条件 (拡散反射, Maxwell 型) や, 他の剛体形状などに関しては, 文献 [1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13] を見てほしい.

3.3 剛体速度の漸近挙動 : Lorentz 気体の場合

この節では, (特殊な) Lorentz 気体中を運動する剛体を扱う.

Lorentz 気体の物理的な描像は, 気体中に (球形の) 障害物がランダムに分散している, というものである. この障害物は気体の凝縮相のような働きをする.*⁹ すなわち, 障害物は気体分子を吸収・放出する. 障害物の分布, 放出分子の分布は既知として, それぞれ (別々の) Maxwell 分布 (§2.3) に従うとする. また, 分子同士の衝突は, 分子と障害物の衝突と比べて十分少なく, 障害物の熱運動は分子の熱運動に比べて十分弱いとする. 詳しい説明は [17] を見てほしい.

このとき, 気体分子の分布関数 f は次の運動論方程式に従う [17] :

$$\partial_t f + \bar{\xi} \cdot \nabla_x f = \frac{\nu_\varepsilon(|\xi|)}{\kappa} (f_0 - f) \quad (x \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0); \quad (3.11)$$

ここで $f_0 = \pi^{-3/2} \exp(-|\xi|^2)$ である. $\kappa \geq 1$ は分子と障害物の衝突頻度 (の逆数) を表す定数, $\varepsilon \geq 0$ は障害物の熱運動の強さを表す定数である. また $\operatorname{erf}(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-y^2} dy$ を誤差関数として,

$$\nu_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon}{2} \left[\exp(-z^2/\varepsilon^2) + \pi^{1/2} \left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2z} \right) \operatorname{erf}(z/\varepsilon) \right]$$

である.

Lorentz 気体中を運動する剛体の漸近挙動について, Tsuji と Aoki は数値的な検討を行った [17]; 以下の定理は, 数値的に観測された漸近挙動を数学的に証明した結果である [12].*¹⁰

定理を述べるために, 以下の記号を導入する :

$$w_{\varepsilon, \kappa, d}(t) = \frac{1}{(1+t)^{d+2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t/(\varepsilon\kappa)}} + \frac{1}{1+t/\kappa} \right)^{3-d}.$$

Theorem 3.2 (K). $\kappa \geq 1, \varepsilon \leq \kappa C_0/4$ とする. γ が十分小さいとき, 方程式 (3.11), (3.3), (3.4); および方程式 (3.7), (3.6) の解 (f, V) で, 次の不等式をみたすものが存在する :

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \gamma e^{-C_\gamma t} - \gamma^3 A_1 w_{\varepsilon, \kappa, d}(t) e^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa} t}, \\ V(t) &\leq \gamma e^{-C_0 t} - \gamma^5 A_2 w_{\varepsilon, \kappa, d}(t) e^{-\frac{\varepsilon}{\kappa} t} \mathbf{1}_{\{t \geq 2t_\gamma\}}; \end{aligned}$$

ただし, A_1, A_2 は d のみに依存する正定数である. また, 任意の解 (f, V) は上の不等式をみたし, $V(t)$ は区間 $[0, t_\gamma]$ で単調減少である.

*⁹ 気体を水蒸気とすると, この障害物は水滴にあたる; もっとも, 今は単原子分子を考えているので, 水蒸気というのは比喩である.

*¹⁰ より正確には, Tsuji と Aoki は方程式 (3.7) ではなく, 線形復元力の付いた方程式 $dV(t)/dt = -X(t) - D(t)$ を扱った. また, 境界条件は鏡面反射ではなく, 拡散反射である. 数値計算的には鏡面反射より拡散反射の方が易しい; 数学的には拡散反射より鏡面反射の方が易しい.

Remark 3.2. (i) $\varepsilon \neq 0$ で κ が有限の場合, $V(t)$ は指数的に減衰する; $\varepsilon = 0$ で κ が有限の場合, $V(t)$ は次元 d に依存しない指数 -5 で代数的に減衰する; $\kappa = \infty$ の場合, $V(t)$ は次元 d に依存する指数 $-(d+2)$ で代数的に減衰する. (ii) 解の一意性は自由分子流の場合 (§3.2) と同様, 未解決である. (iii) $V(t)$ は自由分子流の場合と同様, 符号を変える: $V(t) > 0$ ($t \geq t_\gamma$) かつ $V(t) < 0$ ($t \geq 8t_\gamma$) が成り立つ. (iv) $\varepsilon \leq \kappa C_0/4$ をみたさないとき, この定理は必ずしも成り立たない. 実際, $\varepsilon \geq 2\kappa C_0$ であれば, $V(t)$ は常に正で, 指数的に減衰する [12].

4 論議

4.1 証明の方針

証明の基本的なアイデアは, 解 (f, V) を適切な写像の不動点として構成することである. 設定をはっきりさせるため, §3.3 の状況を考えよう; とはいえ, 以下しばらくは自由分子流 (§3.2) と Lorentz 気体 (§3.3) に共通の内容である.

$W: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を Lipschitz 連続な関数として, $X_W(t) = \int_0^t W(s) ds$ とおく. $C_W(t)$ を式 (3.1) の右辺で $X(t)$ を $X_W(t)$ で置きかえたもので定義する; $I_W^\pm(t)$ を式 (3.5) の右辺で $C(t)$, $X(t)$, $V(t)$ を $C_W(t)$, $X_W(t)$, $W(t)$ で置きかえたもので定義する.

$f = f_W$ を方程式 (3.11), (3.3) および

$$f(x, \xi, t) = f(x, \xi - 2[(\xi - W(t)\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}, t) \quad (x \in \partial C_W(t), (\xi - W(t)\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} > 0, t > 0)$$

の解とする. f_W は §2.4 で述べた特性曲線の方法で構成できる. (W は未知量ではなく, 既知の関数であることに注意する.)

次に, $V_W: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定める. まず,

$$r_W^\pm(t) = \pm 2 \int_{I_W^\pm(t)} (\xi_1 - W(t))^2 (f_W - f_0) d\xi dS \quad (4.1)$$

とおく. 次に, 関数 $K: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$K(U) = D_0(U)/U \quad (U \neq 0); \quad K(0) = D'_0(0)$$

と定める. そうして, V_W を次の方程式の解とする:

$$dV_W(t)/dt = -K(W(t))V_W(t) - r_W^+(t) - r_W^-(t), \quad V_W(0) = \gamma.$$

これは明示的に解けて,

$$V_W(t) = \gamma e^{-\int_0^t K(W(s)) ds} - \int_0^t e^{-\int_s^t K(W(\tau)) d\tau} (r_W^+(s) + r_W^-(s)) ds.$$

V を写像 $W \mapsto V_W$ の不動点とすると, (f_V, V) は方程式 (3.11), (3.3), (3.4); および方程式 (3.7), (3.6) の解である. このことは

$$D_0(V(t)) = 2 \left(\int_{I_V^+(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f_0 d\xi dS - \int_{I_V^-(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f_0 d\xi dS \right)$$

に注意すれば分かる。(上の式が成り立つように定数 c_d を定義した.)

不動点 V の存在を示すには, 写像 $W \mapsto V_W$ の定義域 \mathcal{K} を適切に定める必要がある; とくに, $W \in \mathcal{K}$ ならば $V_W \in \mathcal{K}$ が成り立つようにしたい. \mathcal{K} の定義には, $r_W^\pm(t)$ の $t \rightarrow \infty$ での減衰評価が密接に関わっている.

4.2 $r_W^\pm(t)$ の評価と再衝突

$r_W^\pm(t)$ の評価が証明のもっとも本質的な部分であるが, それをここで述べる余裕はない; ここでは $R_W(t) := r_W^+(t) + r_W^-(t) \neq 0$ であることについて, 少しだけ説明しておく. 式 (4.1) より, $R_W(t) \neq 0$ であるためには, ある $(x, \xi) \in I_W^\pm(t)$ で $f_W \neq f_0$ となる必要がある. (x, ξ) に対して, §2.4 で述べたように, τ_1 を定義する. $\tau_1 \leq 0$ であれば, $f_W = f_0$ が従う.(自由分子流の場合は, 式 (2.4) から従う; Lorentz 気体の場合にも, 同様の計算から従う.) つまり, $R_W(t) \neq 0$ であるためには, ある (x, ξ) で $\tau_1 > 0$ となる必要がある. これは, $x \in \partial C_W(t)$ に速度 ξ で衝突する分子が, 過去にも剛体に衝突していたこと(再衝突; recollision)に対応する.

再衝突は実際に起こり, この影響が漸近挙動を決定する. 再衝突のために, 時刻 t での抵抗力 $D(t)$ は運動の履歴に依存する(履歴効果). Lorentz 気体では, 気体中の障害物が分子を散乱(吸収・放出)し, 履歴効果を破壊する. その結果, Lorentz 気体中では, 自由分子流の場合と異なり, ($\varepsilon \neq 0, \kappa < \infty$ のとき) 指数的な漸近挙動となる; $\varepsilon = 0$ の場合には, 障害物は熱運動をせず, そのあいだを縫って再衝突が起こり, 代数的な漸近挙動となる(定理 3.2).

4.3 工学的な問題との関連

非常に小さなスケールの気体流れは, Navier–Stokes 方程式ではなく, 分子気体力学の方程式(Boltzmann 方程式など)で記述する必要がある. MEMS (micro-electro-mechanical systems) とよばれる系では, 微小流路中で, 物体と気体の相互作用を解析する必要がある. そのような問題は, 本稿で扱った問題と関連が深い. MEMS に対する分子気体力学からのアプローチについては, 文献 [9, 14, 15, 19] を挙げておく.

4.4 Boltzmann 方程式の場合

本稿では自由分子流と Lorentz 気体の場合に, 分子気体力学から剛体運動を論じた研究を紹介した; Boltzmann 方程式 (§2.2) の場合には漸近挙動どころか, 短い時間の解の存在すら分かっていない. 現状, 文献 [18] で漸近挙動の数値的な検討が行われている. それによると Boltzmann 方程式の場合, 剛体の速度 $V(t)$ は代数的に減衰する; ただし, その指数は自由分子流の場合 (§3.2) とは異なる. 漸近挙動の数学的な研究はまったく手つかずで, 今後の研究によって明らかにすべきである.

参考文献

- [1] K. Aoki, G. Cavallaro, C. Marchioro and M. Pulvirenti, *On the motion of a body in thermal equilibrium immersed in a perfect gas*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **42** (2008), 263–275.
- [2] P. Buttà, G. Cavallaro and C. Marchioro, *Mathematical Models of Viscous Friction*, Lecture Notes in Mathematics, **2135**, Springer, 2015.

- [3] S. Caprino, G. Cavallaro and C. Marchioro, *On a microscopic model of viscous friction*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (2007), 1369–1403.
- [4] S. Caprino, C. Marchioro and M. Pulvirenti, *Approach to equilibrium in a microscopic model of friction*, Comm. Math. Phys., **264** (2006), 167–189.
- [5] G. Cavallaro, *On the motion of a convex body interacting with a perfect gas in the mean-field approximation*, Rend. Mat. Appl., **27** (2007), 123–145.
- [6] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer, 1988.
- [7] X. Chen and W. Strauss, *Approach to equilibrium of a body colliding specularly and diffusely with a sea of particles*, Arch. Ration. Mech. Anal., **211** (2014), 879–910.
- [8] X. Chen and W. Strauss, *Velocity reversal criterion of a body immersed in a sea of particles*, Comm. Math. Phys., **338** (2015), 139–168.
- [9] G. Dechristé and L. Mieussens, *Numerical simulation of micro flows with moving obstacles*, J. Phys. Conf. Ser., **362** (2012), 1–10.
- [10] C. Fanelli, F. Sisti and G. V. Stagno, *Time dependent friction in a free gas*, J. Math. Phys., **57** (2016), 1–12.
- [11] K. Koike, *Wall effect on the motion of a rigid body immersed in a free molecular flow*, Kinet. Relat. Models, to appear.
- [12] K. Koike, *Motion of a rigid body in a special Lorentz gas: Loss of memory effect causes exponential decay*, in preparation.
- [13] C. Ricciuti and F. Sisti, *Effects of concavity on the motion of a body immersed in a Vlasov gas*, SIAM J. Math. Anal., **46** (2014), 3579–3611.
- [14] G. Russo and F. Filbet, *Semilagrangian schemes applied to moving boundary problems for the BGK model of rarefied gas dynamics*, Kinet. Relat. Models, **2** (2009), 231–250.
- [15] S. Shrestha, S. Tiwari, A. Klar and H. Steffen, *Numerical simulation of a moving rigid body in a rarefied gas*, J. Comput. Phys., **292** (2015), 239–252.
- [16] Y. Sone, *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications*, Birkäuser, 2007.
- [17] T. Tsuji and K. Aoki, *Decay of a linear pendulum in a free-molecular gas and in a special Lorentz gas*, J. Stat. Phys., **146** (2012) 620–645.
- [18] T. Tsuji and K. Aoki, *Moving boundary problems for a rarefied gas: Spatially one-dimensional case*, J. Comput. Phys., **250** (2013) 574–600.
- [19] T. Tsuji and K. Aoki, *Gas motion in a microgap between a stationary plate and a plate oscillating in its normal direction*, Microfluidics Nanofluidics, **16** (2014) 1033–1045.