極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数について

藤野 弘基 (Hiroki FUJINO)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD *

概要

1956 年, Beurling–Ahlfors によって実数直線上の擬対称写像に対し上半平面への擬等角拡張が与えられた. それ以来よりよい擬等角拡張を得るためにいくつかの拡張定理が示されてきた. その中で本論説のメインテーマになるのが 2010 年に Bonsante–Schlenker によって与えられた, 双曲的面積を保存し, グラフが上半平面の直積空間内の極小曲面となるような擬等角拡張 (極小ラグランジュ拡張) である. グラフの極小性については 2 階の偏微分方程式によって書くことができるはずだが, Bonsante–Schlenker の証明においてはその微分方程式は具体的に, 特に標準的な座標に対して与えられていない. 本論説では上半平面から上半平面への滑らかな関数に対し, グラフの極小性を表す偏微分方程式の導出を行う. さらにその結果から, 面積を保存する擬等角写像に対しグラフが極小となるための必要十分条件がベルトラミ係数の条件として書けることを示す.

1 擬対称写像の擬等角拡張.

1.1 擬等角写像. 複素平面を $\mathbb{C}$ で表し, 領域 $D, D' \subset \mathbb{C}$ 間の向きを保つ可微分同相写像 $f : D \to D'$ を考える. このとき点 $z \in D$ での f のベルトラミ係数 $\mu(z) = \mu_f(z)$, および歪曲係数 $K(z) = K_f(z)$ は次で与えられる;

$$\mu(z) = \frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}, \quad K(z) = \frac{\max\{\|(df)_z(v)\| \mid v \in T_zD, \|v\| = 1\}}{\min\{\|(df)_z(v)\| \mid v \in T_zD, \|v\| = 1\}}.$$

ただし, 歪曲係数の定義においてベクトルの長さはユークリッド計量によって測るものとするが, ベクトルの長さの比をとっているのでユークリッド計量と等角な計量を用いても値は変わらない. 従って, 歪曲係数はリーマン面間の向きを保つ可微分同相写像 $f : R \to R'$ に対しても定義することができ, R 上の非負値関数を与える (定義より $K \geq 1$ である). 一方, ベルトラミ係数についても $(-1, 1)$ 形式として $\mu = \mu d\bar z/dz$ と定義すればリーマン面間の向きを保つ可微分同相写像に対して定義できる. 簡単な計算により

$$K(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar z}(z)|} = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

*本論説は第 14 回数学総合若手研究集会 (2 月 27 日 (火)〜3 月 2 日 (金), 於: 北海道大学) のテクニカルレポートである. 本研究は JSPS 特別研究員奨励費, 科研費 (16J02185) の助成を受けたものである.

が得られる．従って, 歪曲係数 $K(z)$ およびベルトラミ係数 $\mu(z)$ は共に, 全微分 $(df)_z$ がどのくらい円周を歪ませて楕円に移すのかを表す指標であると考えられる．

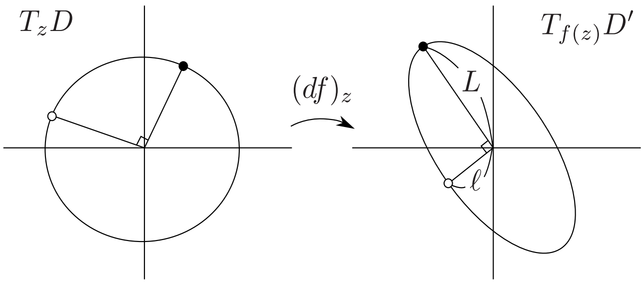

図 1： $\ell = |f_z(z)| - |f_{\bar z}(z)|,\ L = |f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|.$

実数 $K \geq 1$ に対し f が K-擬等角であるとは, 全ての $z \in D$ に対して $K(z) \leq K$ が成り立つことを言う．また, ある $K \geq 1$ に対して f が K-擬等角になるとき, 単純に f は擬等角であると言う．つまり, 擬等角写像とは全微分による円周の歪め具合が一様に抑えられる写像のことである．リーマン面間の擬等角写像についても同様に定義される．また上の議論から f が擬等角となることと, $\|\mu\|_\infty := \mathrm{ess.sup}|\mu| < 1$ となることは同値である．

擬等角写像の定義は線上絶対連続 (ACL) なクラスの (向きを保つ) 同相写像 $f : D \to D'$ へ一般化できる．このとき, $\mu_f(z) = f_{\bar z}(z)/f_z(z)$ はほとんど至る所で定義することができ, $L^\infty(D)_1 := \{\mu \in L^\infty(D) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$ の元を定める．次の強力な定理によって擬等角写像はベルトラミ係数によって完全に決定する．

Theorem (Ahlfors–Bers の可測写像定理) 任意の $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})_1$ に対し, 擬等角写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ であって, $\mu_f = \mu$ がほとんど至る所成立するものが存在する．さらにこのような擬等角写像は $\widehat{\mathbb{C}}$ のメビウス変換の後からの合成を除いて一意である．

$\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ を上半平面とする．この定理の系として, 任意の $\mu \in L^\infty(\mathbb{H})_1$ に対し, $\mu_f = \mu$ がほとんど至る所成立するような擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ が存在することが分かる．さらにこのような擬等角写像は $\mathbb{H}$ のメビウス変換の後からの合成を除いて一意である．

1.2 擬対称写像と Beurling–Ahlfors の定理． 1956 年に Beurling–Ahlfors は, 上半平面の自己擬等角写像の境界値対応を特徴づけるために擬対称写像という概念を導入した．実数直線 $\mathbb{R}$ の向きを保つ自己同相写像 φ が $M \geq 1$ に対し M-擬対称であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ に対し以下の不等式を満たすことを言う;

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \leq M.$$

また, ある $M \geq 1$ に対して φ が M-擬対称となるとき, φ は単純に擬対称であると言う．一般に擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は境界 $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ まで連続に拡張し, $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ の自己同相写像になる．ここで, 次の定理が成り立つ．

Theorem (Beurling–Ahlfors の拡張定理 [BA56]**, 1956)** K-擬等角写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ の $\overline{\mathbb{H}}$ への同相拡張が無限遠点を固定する時, 境界値対応 $\varphi=f|_{\mathbb{R}}$ は M-擬対称である. ただし $M=M(K)\geq 1$ は K にのみ依存する定数である.

逆に $\mathbb{R}$ の向きを保つ同相写像 φ が M-擬対称である時,

$$f_\varphi(x+iy)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}\varphi(t)dt+\frac{i}{y}\left(\int_x^{x+y}\varphi(t)dt-\int_{x-y}^{x}\varphi(t)dt\right)$$

は, φ の $\mathbb{H}$ への C^1 級 K-擬等角拡張を与える. ここで $K=K(M)\geq 1$ は M にのみ依存する定数である. 特に $\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ならば $f_\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ となる.

同様に, 単位円周 $S^1:=\partial\mathbb{D}$ 上の同相写像に対して擬対称性を定義することができ Beurling–Ahlfors の定理が成り立つ; すなわち, S^1 の向きを保つ自己同相写像 ψ が M-擬対称であることを, 任意の θ と $0<t<2\pi$ に対して

$$\frac{1}{M}\leq\left|\frac{\psi(e^{i(\theta+t)})-\psi(e^{i\theta})}{\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i(\theta-t)})}\right|\leq M$$

を満たすことと定めると, $\mathbb{D}$ の自己 K-擬等角写像の境界値対応は $M=M(K)$-擬対称となり, 逆に S^1 の M-擬対称写像は $\mathbb{D}$ への $K=K(M)$-擬等角拡張を持つことが示される.

現在では擬等角性の定義はより高次元の空間へと拡張されている [Väi71], [Väi99]. 擬対称性についても一般の距離空間の間の写像へと定義が拡張されている [TV80]. そして高次元においても Beurling–Ahlfors の定理が成り立つ [Ahl64], [Car74], [TV82]. 一方, ユークリッド空間の一般の部分集合上で定義された擬対称埋め込みの擬等角拡張可能性 (Väisälä の第 8 問題 [Väi95]) については大部分が未解明であり, 現在も研究が行われている, [TV99], [KO11], [Vel15, Vel16], [Fuj16].

1.3 種々の Beurling–Ahlfors の定理. Beurling–Ahlfors の定理はタイヒミュラー空間論において重要な役割を果たす. 特に Beurling–Ahlfors 拡張は具体的な積分によって与えられるため, 擬等角写像やそのベルトラミ係数を解析的に調べるのに役に立つ. 一方で擬対称写像のより良い擬等角拡張を得ることによって, タイヒミュラー理論へのさらなる応用を得ようという研究がいくつかある.

1.3.1 Douady–Earle の拡張定理. 擬等角拡張がメビウス変換に関して同変となることは応用上極めて重要である. 次の定理は重心拡張定理と呼ばれる;

Theorem (Douady–Earle[DE86]**,1986)** 任意の M-擬対称写像 $\psi:S^1\to S^1$ と $z\in\mathbb{D}$ に対し,

$$\frac{1-|w|^2}{2\pi}\int_{S^1}\frac{\psi(\zeta)-w}{1-\psi(\zeta)\overline{w}}\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|=0$$

を満たす唯一の $w\in\mathbb{D}$ を $F_\psi(z)$ と定めると, F_ψ は ψ の $\mathbb{D}$ への実解析的な $K=K(M)$-擬等角拡張を与える. さらに以下の性質が成り立つ;

1. メビウス変換 $g, h \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ に対して, $F_{h\circ\psi\circ g} = h \circ F_\psi \circ g$ が成り立つ.

2. $\psi = \mathrm{id}_{S^1}$ ならば $F_\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

3. $\displaystyle\int_{S^1} \psi(z)dz = 0$ ならば $F_\psi(0) = 0$.

Douady–Earle 拡張は性質 (1),(3) によって特徴付けられる; すなわち S^1 の擬対称写像に対し, $\mathbb{D}$ への擬等角拡張を与える対応 $\psi \mapsto G_\psi$ が性質 (1),(3) を満たすならば $G_\psi = F_\psi$ となる. また, 双曲型リーマン面間の擬等角写像 $f : R \to S$ が与えられた時, 普遍被覆 $\pi_R : \mathbb{D} \to R$ および $\pi_S : \mathbb{D} \to S$ によって, f は擬等角写像 $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に持ち上がる. この時, π_R および π_S に関する被覆変換群をそれぞれ Γ_R, $\Gamma_S \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ とすると, $\Gamma_S = F \circ \Gamma_R \circ F^{-1}$ が成り立つ. 従って, 境界値対応 $\psi = F\mid_{S^1}$ も $\Gamma_S = \psi \circ \Gamma_R \circ \psi^{-1}$ を満たす. 逆に擬対称写像 ψ が $\Gamma_S = \psi \circ \Gamma_R \circ \psi^{-1}$ を満たせば, 性質 (3) から Douady–Earle 拡張も $\Gamma_S = F_\psi \circ \Gamma_R \circ F_\psi^{-1}$ を満たす. 従って F_ψ は擬等角写像 $f : R \to S$ を誘導することがわかる. 性質 (3) は等角自然性と呼ばれる.

1.3.2 Schoen 予想 (調和拡張). 一般にリーマン多様体間の滑らかな写像 $f : (M^m, g) \to (N^n, h)$ が調和であるとは, エネルギー汎関数 $E(f) = \displaystyle\int_M \mathrm{Tr}_g(f^*h)\, v_M$ の臨界点であることを言う. ただし v_M は g に関する体積要素を表す. これは, 各局所座標に関して $f : x = (x^1, \cdots, x^m) \mapsto f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x))$ と書いた時

$$\triangle_g f^k + \sum_{\alpha,\beta,i,j} g^{\alpha\beta} \cdot {}^N\Gamma^k_{ij} \circ f \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial x^\beta} = 0, \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

が成り立つことと同値である. ただし, $\triangle_g = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$ は g に関するラプラス・ベルトラミ作用素, $(g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ は $g = (g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ と行列表示した時の g の逆行列, そして ${}^N\Gamma^k_{ij}$ は h に関するクリストッフェル記号とする.

滑らかな写像 $f : (\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}}) \to (\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ を考える. ただし $g_{\mathbb{H}}$ は上半平面のポアンカレ計量, すなわち $g_{\mathbb{H}}(z) = \sigma(z)^2|dz|^2$ $(\sigma(z) = (\mathrm{Im}z)^{-1})$ とする. この時, 調和写像の方程式 (1) は標準的な複素座標を用いて

$$f_{z\bar{z}} + 2\left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \circ f\right) f_z f_{\bar{z}} = 0$$

と書ける. 次の Schoen 予想 [Sch93] は, 一意性は Li–Tam[LT93a, LT93b] によって 1993 年に, 存在性は Markovic[Mar17] によって 2017 年に解決された;

Theorem $\mathbb{R}$ 上の擬対称写像は, $\mathbb{H}$ への調和な擬等角拡張をただ一つ持つ.

$\mathbb{H}$ のメビウス変換はポアンカレ計量に関して等長的であった. 拡張の一意性から調和拡張も等角自然性を持つことが分かる. 従って双曲型リーマン面 R に対し, タイヒミュラー同値類 $[f : R \to S] \in T(R)$ は, $\mathbb{D}$ のポアンカレ計量から誘導される双曲計量 g_R および g_S に関して調和な擬等角変形 $f_H : R \to S$ を (S の自己同型による違いを除き) ただ一つもつ. 特に, 任意の擬等角変形 $g : R \to S$ はただ一つの調和擬等角変形にアイソトピックである.

1.3.3　極小ラグランジュ拡張.　本論説のメインテーマとなるのが, Bonsante–Schlenker によって得られた次の拡張定理である;

Theorem (Bonsante–Schlenker の極小ラグランジュ拡張 [BS10]**, 2010)**
$\mathbb{R}$ の擬対称写像 φ は, 以下の性質を満たすただ一つの擬等角拡張 $f = f_{\mathrm{ML}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ をもつ;

1. f はポアンカレ計量 $g_{\mathbb{H}}$ に関して面積を保存する. すなわち, 面積要素を $v_{\mathbb{H}} = \sqrt{\det g_{\mathbb{H}}}\, dxdy = \sigma(z)^2 dxdy$ $(z = x + iy)$ とすると, 任意の可測集合 $A \subset \mathbb{H}$ に対し以下が成り立つ;
$$\int_{f(A)} v_{\mathbb{H}} = \int_A v_{\mathbb{H}}.$$
2. f のグラフ $\Gamma_f := \{(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{H}\}$ は $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}, g_{\mathbb{H}} + g_{\mathbb{H}})$ 内の極小部分多様体となる.

一般に多様体 S からリーマン多様体 (N, h) への滑らかな埋め込み (あるいはより一般にはめ込み) $\Phi : S \to (N, h)$ が面積汎関数 $A(\Phi) = \displaystyle\int_S \Phi^* v_N$ の臨界点となるとき, Φ およびその像 $\Phi(S) \subset N$ は極小であると言う. これは $M = \Phi(S)$ の平均曲率ベルトル場 H_M が 0 になることと同値である. グラフ Γ_f は実次元 2 の部分多様体であるので, Γ_f が極小部分多様体となるとき極小曲面と呼ぶ. 第 3 節で説明するが, $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ にはケーラー多様体の構造が入る. このとき, f_{ML} の満たす性質 (1) は, シンプレクティック構造 $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ に関して Γ_f がラグランジュ部分多様体となることと同値である[1]. 以上の意味で f_{ML} は極小ラグランジュ (minimal Lagrangian) 擬等角拡張と呼ばれる. 証明, 特に拡張の構成法については第 2 節で説明するが, ローレンツ幾何, 特に反ド・ジッター空間の幾何学を用いる.

拡張の一意性を使えば, 極小ラグランジュ擬等角拡張も等角自然性を持つことがわかる. 特に, 双曲型リーマン面間の擬等角写像は, ポアンカレ計量からそれぞれのリーマン面に誘導される双曲計量に関して面積を保存するような擬等角写像とアイソトピックである.

2　極小ラグランジュ擬等角拡張の構成.

第 1 節で述べた Bonsante–Schlenker の極小ラグランジュ擬等角拡張について、その構成法の概略を述べる. 詳しい内容については [BS10], [Bar16], ローレンツ幾何の基本的事項については [O'N83] が参考になる.

単位円板 $\mathbb{D}$ と実数直線 $\mathbb{R}$ の直積空間に, ローレンツ計量
$$(g_{\mathrm{AdS}^3})_{(w,t)} := (g_{\mathbb{D}})_w - \left(\frac{1+|w|^2}{1-|w|^2}\right)^2 dt^2$$
を入れたものを AdS^3 と書き, (3 次元) 反ド・ジッター空間と呼ぶ. ただし, $(w, t) \in \mathrm{AdS}^3 = \mathbb{D}\times\mathbb{R}$ を標準的な座標, $g_{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ 上のポアンカレ計量とする. やや

[1]つまり, $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}|_{\Gamma_f} = 0$ となる.

天下りな定義であるが, 関数 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ が空間的であるとは $|g_w|^2<(1+|w|^2)^{-2}$ を満たすことをする[2]. 空間的な関数 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ のグラフを $S\subset \mathrm{AdS}^3$ とする. このときガウス写像と呼ばれる対応, $S\to\mathbb{D}\times\mathbb{D}, p\mapsto(J_L(p),J_R(p))$ が得られる. $G:\mathbb{D}\to\mathrm{AdS}^3$ を $G(w)=(w,g(w))$ と定め, $\widetilde{J_L}=J_L\circ G, \widetilde{J_R}=J_R\circ G$ を計算すると

$$\begin{aligned}\widetilde{J_L} &= \frac{-2iw+(1+|w|^2)(\overline{g_w}-w^2g_w)}{(1+|w|^2)(1+2\mathrm{Im}(wg_w))+(1-|w|^2)\sqrt{1-(1+|w|^2)^2|g_w|^2}}\,e^{ig}\\ \widetilde{J_R} &= \frac{2iw+(1+|w|^2)(\overline{g_w}-w^2g_w)}{(1+|w|^2)(1-2\mathrm{Im}(wg_w))+(1-|w|^2)\sqrt{1-(1+|w|^2)^2|g_w|^2}}\,e^{-ig}\end{aligned}$$

となることが分かる. ここで $f:=J_R\circ J_L^{-1}=\widetilde{J_R}\circ\widetilde{J_L}^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ と置く. この時, 一般に f は $\mathbb{D}$ 上のポアンカレ計量に関して面積を保存する写像になることが示される.

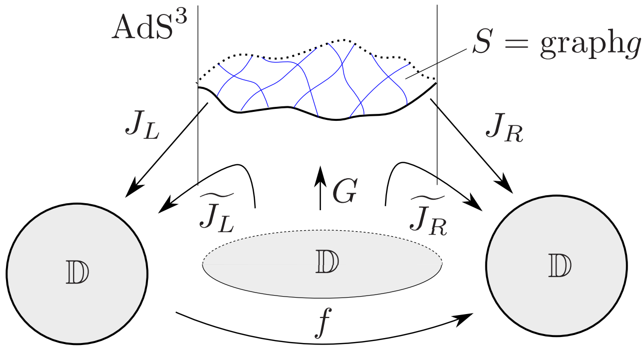

図 2 双曲的面積を保存する写像の構成.

例えば, $g(w)=(u-9)^2/18$ $(w=u+iv)$ とすれば f は下図のような対応になる. ただし, 最も右の図は $\widetilde{J_L}$ および $\widetilde{J_R}$ によって移された三角形の像を一つの円板上に描いたものである.

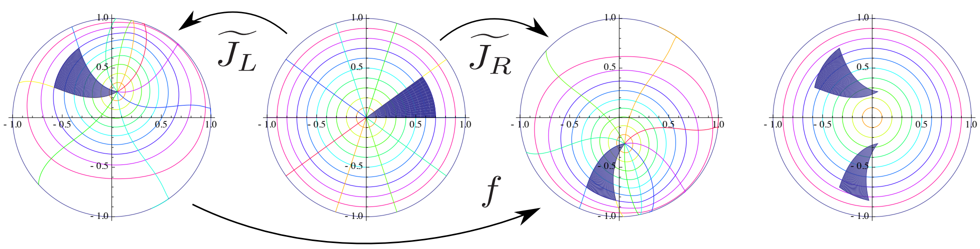

図 3 $g(w)=(u-9)^2/18$ の場合.

ローレンツ幾何においてもリーマン幾何と同様にして, レビ・チビタ接続, リーマン曲率テンソル, 各種曲率が定義される. ローレンツ幾何では平均曲率ベクトル場が恒等的に消えるような (空間的) 曲面を極大曲面と呼ぶ. もし g の

[2]関数 g のグラフを $S\subset\mathrm{AdS}^3$ と置く. 通常ならば, g が空間的であるとは S への g_{AdS^3} の制限が正定値となることと定義される.

グラフ S が極大であれば f は極小ラグランジュとなることが示される．つまり, f は双曲的面積を保存し, そのグラフは $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ の極小曲面を定めるのである．さらに, S のガウス曲率が一様に負であれば f が擬等角となることも示される．より詳しく, S の主曲率によって f の歪曲度が書ける．つまり g のグラフの曲がり具合に f の歪曲度・ベルトラミ係数の情報が現れるのである．

Bonsante–Schlenker は $S^1=\partial\mathbb{D}$ の擬対称写像から g の境界値条件を設定し, 境界値条件を満たす g で S が極大かつ一様負なガウス曲率を持つようなものを構成することによって定理を示している．

3 極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数．

極小ラグランジュ擬等角写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ は, ポアンカレ計量に関して面積を保存し, グラフ $\Gamma_f=\{(z,f(z))\mid z\in\mathbb{H}\}$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 内の極小曲面となるような擬等角写像であった．グラフが極小曲面になるという条件は, Γ_f の平均曲率ベクトル場が 0 になることに対応するため f に関する 2 階の微分方程式によって書くことができるはずである．この節では, Γ_f が極小曲面となるために必要な f に関する微分方程式を導出し, それによって面積を保存する擬等角写像が極小ラグランジュとなるための必要十分条件を与える．またその条件はベルトラミ係数の条件によって書くことができることを説明する．

3.1 空間 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. 上半平面を $\mathbb{H}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ としポアンカレ計量 $(g_{\mathbb{H}})_z=\sigma(z)^2|dz|^2$ $(\sigma(z)=(\mathrm{Im}z)^{-1})$ が入っているものとする．また $g_{\mathbb{H}}$ に関する体積形式を $(\omega_{\mathbb{H}})_z=2^{-1}i\sigma(z)^2dz\wedge d\bar{z}=\sigma(z)^2dx\wedge dy$ とする．空間 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ には次のリーマン計量 $g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ およびシンプレクティック形式 $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ が入る;

$$(g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,w)}=(g_{\mathbb{H}})_z+(g_{\mathbb{H}})_w,$$
$$(\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,w)}=(\omega_{\mathbb{H}})_z-(\omega_{\mathbb{H}})_w.$$

このとき, $(\mathbb{H}\times\mathbb{H},g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}},\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})$ はケーラー多様体になっている．向きを保つ可微分同相写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ に対し, そのグラフ $\Gamma_f=\{(z,f(z))\mid z\in\mathbb{H}\}$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ のラグランジュ部分多様体になるとは, $(\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,f(z))}$ の $T_{(z,f(z))}\Gamma_f$ への制限が消えるということだが, これは $f^*\omega_{\mathbb{H}}=\sigma(f(z))^2(|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2)dx\wedge dy=\sigma(z)^2dx\wedge dy=\omega_{\mathbb{H}}$ と同値である．つまり, Γ_f がラグランジュ部分多様体になることと, f がポアンカレ計量に関して面積を保存することは同値である．

標準的な座標 $(z=x_1+ix_2,w=x_3+ix_4)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ に関して, $\{\partial/\partial x_j\}_{j=1}^4$ は $T_{(z,w)}\mathbb{H}\times\mathbb{H}=T_z\mathbb{H}\oplus T_w\mathbb{H}$ の基底を与える．$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ のレビ・チビタ接続を ∇ としたとき, 点 (z,w) でのクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は, $\Gamma_{11}^2=-\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{21}^1=-\Gamma_{22}^2=\sigma(z)$, $\Gamma_{33}^4=-\Gamma_{34}^3=-\Gamma_{43}^3=-\Gamma_{44}^4=\sigma(w)$ となり, これ以外の (i,j,k) に対しては $\Gamma_{ij}^k=0$ となる．

3.2 極小グラフ． 実 2 次元曲面 S の $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ への滑らかな埋め込み $\Phi:S\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ を考える．$\zeta=(\xi,\eta)$ を S の局所座標として, $\Phi(\zeta)=(\Phi^1(\zeta),\Phi^2(\zeta))$, また $\Phi^1(\zeta):=\varphi^1(\zeta)+i\varphi^2(\zeta),\Phi^2(\zeta):=\varphi^3(\zeta)+i\varphi^4(\zeta)$ と書くことにする．S 上にリーマン計量が入っているとき, Φ が調和写像になることと各 φ^k $(k=1,2,3,4)$ が調和写像の方程式 (1) を満たすことは同値であるが, これは Φ のテンション場が 0 となることに対応している．特に Φ が等長埋め込みであるとき, テン

ション場と平均曲率ベクトル場は (定義によっては定数倍の違いを除いて) 一致する．すなわち等長埋め込みに対しては極小性と調和性は同値になる (参考: [BW03])．ここで, $g = \Phi^* g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ によって Φ を等長埋め込みと見なすことにする．接空間 $T_\zeta S$ の複素化 $T_\zeta^{\mathbb{C}} S = T_\zeta S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を考え,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

を用いると, 調和写像の方程式 (1) は

$$\triangle_g \Phi^k + i\sigma\circ\Phi^k \cdot \left(a\ \Phi^k_\zeta\ \Phi^k_\zeta + b\ \Phi^k_\zeta\ \Phi^k_{\bar\zeta} + c\ \Phi^k_{\bar\zeta}\ \Phi^k_\zeta + d\ \Phi^k_{\bar\zeta}\ \Phi^k_{\bar\zeta}\right) = 0 \quad (k=1,2), \tag{2}$$

と書けることが分かる．ただし, 局所座標 $\zeta = (\xi, \eta)$ において, $g^{-1} = (g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ と書いたとき,

$$\begin{cases} a = g^{11} + ig^{12} + ig^{21} - g^{22}, \\ b = g^{11} - ig^{12} + ig^{21} + g^{22}, \\ c = g^{11} + ig^{12} - ig^{21} - g^{22}, \\ d = g^{11} - ig^{12} - ig^{21} - g^{22}, \end{cases}$$

とする．以上から, $\Phi(S)$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の極小曲面になるための必要十分条件は, 計量 $g = \Phi^* g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ に関して方程式 (2) を満たすこととなる．

ここで領域 $U \subset \mathbb{H}$ 上の滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{H}$ に対し, $\Phi(z) = (z, f(z))$ を適用すると以下の結果が得られる;

Theorem A 領域 U 上の滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{H}$ に対し, グラフ $\Gamma_f \subset \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ が極小になるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである*;*

- $$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\overline{f_z} f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} + \frac{i\sigma\overline{f_z} f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} = 0, \tag{3}$$

- $$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\frac{|f_z|^2 f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\alpha f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\alpha f_z}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{|f_{\bar z}|^2 f_z}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{i\sigma^2}{\sigma\circ f}\frac{f_z f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\alpha := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma^2}{(\sigma\circ f)^2} + |f_z|^2 + |f_{\bar z}|^2\right), \quad \sigma(z) := \dfrac{1}{\mathrm{Im} z}$, とする．

3.3 極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数． $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を極小ラグランジュ擬等角写像とする．このとき f のグラフは極小なので方程式 (3), (4) を満たす．さらに, ポアンカレ計量に関して面積を保存するので $(\sigma\circ f)^2(|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2) = \sigma^2$ が成り立ち, 方程式 (3), (4) において $\alpha = |f_z|^2$ となる．$\mu = \mu_f = f_{\bar z}/f_z$ を f のベルトラミ係数とすれば, それぞれの方程式は以下のようになる;

- $$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}} + i\sigma\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} = 0, \tag{3'}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(f_z\sqrt{1-|\mu|^2}\right) + i\sigma\mu\frac{f_z^2}{|f_z|} = 0. \tag{4'}$$

一方, ラグランジュ性 (つまりポアンカレ計量に関して面積を保存する性質) を仮定したとき, 擬等角写像の極小性は (3') のみから導かれる. すなわち以下の結果が得られる;

Theorem B ポアンカレ計量に関して面積を保存する滑らかな擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ に対し, f が極小となるための必要十分条件は, ベルトラミ係数 $\mu = \mu_f$ が次の微分方程式を満たすことである;

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}} + \frac{i}{\mathrm{Im} z}\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} = 0.$$

ラグランジュ性についても微分方程式の言葉で書くことができるので, 極小ラグランジュ擬等角写像を特徴づける微分方程式系が得られる;

Theorem C 滑らかな擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ が極小ラグランジュとなるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである;

$$\begin{cases} \dfrac{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2}{\mathrm{Im} f} = \dfrac{1}{\mathrm{Im} z}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}} + \dfrac{i}{\mathrm{Im} z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} = 0. \end{cases}$$

また, 単位円板 $\mathbb{D}$ に対して書き直すと以下のようになる;

Theorem D 滑らかな擬等角写像 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が極小ラグランジュとなるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである;

$$\begin{cases} \dfrac{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2}{(1-|f|^2)^2} = \dfrac{1}{(1-|z|^2)^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}} + \dfrac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}} = 0. \end{cases}$$

しかし, 定理 C, D において, ラグランジュ性を表す微分方程式がベルトラミ係数の条件によって書けていないという課題が残る.

REFERENCES

[Ahl64] Lars V. Ahlfors, *Extension of quasiconformal mappings from two to three dimensions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 768–771. MR0167617

[BA56] A. Beurling and L. V. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. **96** (1956), 125–142. MR0086869 (19,258c)

[Bar16] T. Barbot, *Lorentzian kleinian groups*, 2016. arXiv:1609.03863 [math.DG].

[BS10] Francesco Bonsante and Jean-Marc Schlenker, *Maximal surfaces and the universal Teichmüller space*, Invent. Math. **182** (2010), no. 2, 279–333. MR2729269

[BW03] Paul Baird and John C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 29, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003. MR2044031

[Car74] Lennart Carleson, *The extension problem for quasiconformal mappings*, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), 1974, pp. 39–47. MR0377046

[DE86] A. Douady and C. J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), no. 1-2, 23–48. MR857678 (87j:30041)

[Fuj16] H. Fujino, *Quasisymmetric embedding of the integer set and its quasiconformal extension*, 2016. arXiv:1605.08855 [math.MG].

[KO11] Leonid V. Kovalev and Jani Onninen, *An N-dimensional version of the Beurling-Ahlfors extension*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **36** (2011), no. 1, 321–329. MR2797699

[LT93a] Peter Li and Luen-Fai Tam, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 1, 167–201. MR1200080

[LT93b] ———, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 1, 167–201. MR1200080

[Mar17] Vladimir Markovic, *Harmonic maps and the Schoen conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 799–817. MR3630088

[O'N83] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity. MR719023

[Sch93] Richard M. Schoen, *The role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 179–200. MR1201611

[TV80] P. Tukia and J. Väisälä, *Quasisymmetric embeddings of metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), no. 1, 97–114. MR595180

[TV82] ———, *Quasiconformal extension from dimension n to $n+1$*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), no. 2, 331–348. MR647809

[TV99] D. A. Trotsenko and J. Väisälä, *Upper sets and quasisymmetric maps*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24** (1999), no. 2, 465–488. MR1724387

[Väi99] Jussi Väisälä, *The free quasiworld. Freely quasiconformal and related maps in Banach spaces*, Quasiconformal geometry and dynamics (Lublin, 1996), 1999, pp. 55–118. MR1709974

[Väi71] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR0454009 (56 #12260)

[Väi95] ———, *Questions on quasiconformal maps in space*, Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995), 1995. MR1488460

[Vel15] Vyron Vellis, *Quasisymmetric extension on the real line*, 2015. arXiv:1509.06638 [math.MG].

[Vel16] V. Vellis, *Extension properties of planar uniform domains*, 2016. arXiv:1609.08763 [math.MG].