A Functional Directional Derivative in Infinite Dimensional Spaces and Its Application to $\bar{\partial}$-equations

Yuta Aihara
相原　祐太
北海道大学大学院理学研究院

1　序

無限次元空間における微積分法は様々な方法で研究されてきた。例えば、そのような研究の一つでフレッシェ微分の概念とその一般化を用いたものが [6] にある。筆者はある抽象ボース場の分配関数の $h \to 0$（h はプランク定数）についての漸近解析をボソンフォック空間における汎関数微分の概念を用いて行ったが、それによって、無限次元空間における微分の概念の応用が有効であることが一定程度示された [1,2]。一方で、微分作用素のあるクラスがボソン生成作用素とボソン消滅作用素から構成される。そのような微分作用素の観点から無限次元空間の構造を研究することは興味深く、これまでに十分にはなされていないかもしれない。本稿の目的は、そのような研究にとって基本的かつ一般的な結果とその応用の一つを示すことにある。よく知られているように、$\bar{\partial}$-方程式は有限次元の複素多様体の解析において重要な役割を演じる。だから、$\bar{\partial}$-方程式を複素無限次元空間において考察することは自然である。この主題に関しては、既に研究がなされている [6]。[6] においては、核型空間が無限次元空間として取られ、用いられている微分の概念は主に Silva-微分である。本稿において、我々は抽象ボソンフォック空間 $L^2(Q, d\mu)$ をいわゆる Q-空間表現 (例えば、[5,9] を参照) によって考察し、それとは異なる微分の概念を導入する。それから、我々はある単純な汎関数のクラスについて、$\bar{\partial}$-方程式を解く。ここで導入される $L^2(Q, d\mu)$ における微積分法の定式化と $\bar{\partial}$-方程式についての結果は新しいものと思われる。

2 準備

$\mathscr{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ で $\mathscr{H}$ の複素化を表す。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上のボソンフォック空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}}\\ &= \left\{\psi=\{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\,\middle|\,\psi^{(n)}\in\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}}, n\geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\|\psi^{(n)}\|^2_{\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}}<\infty\right\},\end{aligned}$$

で定義する。ここで、$\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ は $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ の n 重対称テンソル積である（$\otimes_s^0\mathscr{H}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}$）。$f\in\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ における試験ベクトル f に付随するボソン消滅作用素を $a(f)$ で表す。作用素 $a(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり、その共役 $a(f)^*$ は次の形を取る：

$$(a(f)^*\psi)^{(0)}=0,\ (a(f)^*\psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\psi^{(n-1)}),\ n\geq 1,\ \psi\in D(a(f)^*).$$

ここで、S_n は $\otimes^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称化作用素を表す。作用素 $a(f)^*$ は試験ベクトル f に付随する生成作用素と呼ばれる。

$(Q,\mathscr{B},\mu)$ を確率空間、$\{\phi(f)|f\in\mathscr{H}\}$ を以下の式を満たすガウス超過程とする。

$$\int_Q e^{i\phi(f)}d\mu(\phi)=e^{-\|f\|^2_{\mathscr{H}}/4},\qquad f\in\mathscr{H}.$$

$f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$ に対して、$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ で確率変数 $\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n)$ のウィック積を表す。ウィック積 $:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ は次の漸化式を満たす。

$$:\phi(f_1):=\phi(f_1),$$

$$\begin{aligned}:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): &= \phi(f_1):\phi(f_2)\cdots\phi(f_n):\\ &- \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\langle f_1,f_j\rangle:\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n):\ \ n\geq 2,\end{aligned}$$

ここで、$\widehat{\phi(f_j)}$ は $\phi(f_j)$ を除くことを意味する。ベクトル $\Omega\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\Omega:=(1,0,0,\cdots),$$

で定義する。ベクトル Ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ におけるフォック真空と呼ばれる。次の事実はよく知られている（例えば、[5,9]）。

定理 2.1. 次を満たすボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(Q,d\mu)$ へのユニタリー作用素が一意的に存在する。

$$U\Omega=1,$$

$$U(a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega)=(\sqrt{2})^n:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):,\qquad f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$$

$f \in \mathscr{H}$ に対して、作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := U\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{(a(f)^* - a(f))}\right)U^{-1}.$$

で定義する。すると、$f \in \mathscr{H}$ に対して、$\pi(f)$ は自己共役作用素になる。

すべての $\mathscr{H}$ に対して、f 方向の汎関数的方向微分と呼ばれる D_f を

$$D_f := i\pi(f) + \phi(f).$$

で定義する。すると、よく知られているように [5]、すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して、D_f は $L^2(Q, d\mu)$ 上の可閉線形作用素になる。

定義 2.2. $\mathbb{R}^n$ 上の関数 F は、すべての $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\partial^\alpha F$ が多項式的に有界になるとき、$C^\infty_{\mathrm{p.b.}}(\mathbb{R}^n)$ に属する、といわれる。

以下、微分作用素 $\overline{D_g}$ を単に D_g と書く。関数空間 $\mathscr{T}(Q)$ を

$$\mathscr{T}(Q) := \{F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) | F \in C^\infty_{\mathrm{p.b.}}(\mathbb{R}^n),\ f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H},\ n \in \mathbb{N}\}$$

と定義する。すると、次の命題が成り立つ。

命題 2.3. すべての $g \in \mathscr{H}$ に対して、 $\mathscr{T}(Q) \subset D(D_g)$ が成り立つ。 さらに、すべての $F \in C^\infty_{\mathrm{p.b.}}(\mathbb{R}^n)$ と $g, f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H}$ に対して

$$D_g F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle (\partial_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

が成り立つ。

変数 x_j について一般化された偏微分作用素を D_j で表す。

命題 2.4. 関数 $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を多項式的に有界で $D_j F \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n,$ を満たすものとする。このとき、ベクトル $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$ が、「分散-共分散行列 $A = (\int_Q \phi(f_i)\phi(f_j) d\mu(\phi))$ が正定値である。」という条件を満たすならば $F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(\overline{D_g|_{\mathscr{T}(Q)}}) \subset D(D_g)$ かつ

$$D_g F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle (D_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

3 ボソンフォック空間における微積分法の諸公式

次の積分記号下の微分公式が成り立つ。

命題 3.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ を区間の直積、$g \in \mathscr{H}$、F を $Q \times A$ で定義された関数で

$$F(\phi,\cdot), D_gF(\phi,\cdot) \in C(A),\ \ \mu - a.e.\ \phi \in Q,\ \ F(\cdot,t) \in D(D_g),\ \ t \in A.$$

を満たすものとする。このとき、

$$\sup_{t\in A}|F(\phi,t)|,\ \sup_{t\in A}|D_gF(\phi,t)|, \int_A |F(\phi,t)|dt, \int_A |D_gF(\phi,t)| \in L^2(Q,d\mu).$$

を満たすならば、$\int_A F(\phi,t)dt \in D(D_g)$ かつ

$$D_g \int_A F(\phi,t)dt = \int_A D_gF(\phi,t)dt.$$

すべての $\phi = (\phi_1,\phi_2) \in Q \times Q$ と $f \in \mathscr{H}$ に対して,$\phi(f)$ を

$$\phi(f) := (\phi_1(f),\phi_2(f)).$$

によって定義する。$g \in \mathscr{H}$ かつ、F を $Q \times Q$ 上の関数で、すべての $\phi_1,\phi_2 \in Q$ に対して $F(\cdot,\phi_2), F(\phi_1,\cdot) \in D(D_g)$ が成り立つものとする。このとき、D_g^1F, D_g^2F を

$$(D_g^1F)(\phi_1,\phi_2) := D_gF(\cdot,\phi_2)(\phi_1),\ (D_g^2F)(\phi_1,\phi_2) := D_gF(\phi_1,\cdot)(\phi_2), \quad \phi_1,\phi_2 \in Q.$$

で定義する。

定義 3.2. F を $Q\times Q$ 上の関数で、すべての $\phi_1,\phi_2 \in Q$ に対して $F(\cdot,\phi_2), F(\phi_1,\cdot) \in D(D_g)$ が成り立つものとする。ある $n \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1,\cdots,n)$,$G_j^k \in L^2(Q \times Q, d(\mu\otimes\mu))$ $(k = 1,2)$ が存在して、すべての $g \in \mathscr{H}$ に対して、$D_g^kF = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle G_j^k$, $k = 1,2.$ が成立するとき、F は $\mathscr{D}$ に属するといわれる。

ここで、ある種の複素微分形式を定義する。その起源は [3,4] にある。$F \in \mathscr{D}$, $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする。$\mathscr{H}_\mathbb{C}$ から $L^2(Q \times Q, d(\mu \otimes \mu))$ への実線形作用素 $\bar{\partial}F$ を

$$\bar{\partial}F(g) := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \langle e_n,\bar{g}\rangle \frac{1}{2}(D_{e_n}^1 + iD_{e_n}^2)F\right), \quad g = g_1 + ig_2,\ g_1,g_2 \in \mathscr{H}.$$

で定義する。この定義は CONS の取り方によらない。

命題 2.3, 命題 3.1 と一般化されたコーシーの積分公式 [7] により、次の定理が得られる。

定理 3.3. $F \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ かつ $f \in \mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $g \in \mathscr{H}_\mathbb{C}$ に対して,

$$\bar{\partial}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{C} F(\phi(f)+\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}\right)(g) = F(\phi(f))\langle f,\bar{g}\rangle.$$

が成り立つ。

次の形のボソンフォック空間における部分積分公式が得られる。

命題 3.4. [5, 8] $g \in \mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $F \in D(\overline{D_g|_{\mathscr{T}(Q)}})$ と $G \in \mathscr{T}(Q)$ に対して、

$$\int_Q (D_g F) G d\mu = \int_Q F(\phi)\left(2\phi(g)G(\phi) - (D_g G)(\phi)\right) d\mu(\phi).$$

が成り立つ。

有限次元空間の解析学における場合と同様に、命題3.4により、汎関数的方向微分作用素 D_g は一般化され、すべての $F \in L^2(Q, d\mu)$ が D_g で微分できるようになる。この一般化された微分の意味で、命題2.4により定理3.3はある一般のクラスの関数に対して拡張される。

参考文献

[1] Y. Aihara, Semi-classical asymptotics in an abstract Bose field model, *IJPAM* **85** (2013), 265-284.

[2] Y. Aihara, Semi-classical asymptotic expansions up to any finite orders of the partition function of an abstract Bose field model, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* **19** (2016), 1650028 (16 pages).

[3] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.* **82** (1989), 330-369.

[4] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), 342-408.

[5] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, 2010.

[6] J.F. Colombeau, “Differential Calculus and Holomorphy,” North-Holland, 1982.

[7] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, D.van Nostrand Publ, 1966.

[8] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer, 1997.

[9] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Prinston University Press, 1974.