

力学的境界条件下での特異拡散方程式*

中屋敷 亮太 (NAKAYASHIKI, Ryota)[†]

千葉大学大学院 理学研究科 博士後期課程 2 年

概要

特異拡散方程式とは、拡散係数が無限大になりうる拡散方程式の総称である。本講演では、その特異拡散方程式に対して、時間発展の偏微分方程式と内部と境界の方程式をつなぐ接合条件で与えられる“力学的境界条件”と呼ばれる境界条件下での初期値境界値問題を扱う。特異拡散と力学的境界条件を課した場合の数学的難しさを中心に、解の定性的性質についての結果を報告する。また特異拡散方程式の応用例として、物質の結晶構造を記述した結晶粒界数理モデルを考察する。

1 導入

本講演を通して、 $1 < N \in \mathbb{N}$, $0 < T < \infty$ を定数とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域とする。また $Q_T := (0, T) \times \Omega$ を時間区間 $(0, T)$ と空間領域 Ω との直積集合とし、同様に $\Sigma_T := (0, T) \times \Gamma$ と表す。このとき $\varepsilon \geq 0$ を定数とし、以下 (1)–(3) から成る Allen–Cahn 型特異拡散方程式の初期値境界値問題 $(S)_\varepsilon$ を考える。

$$(S)_\varepsilon \quad \partial_t u - \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) + \beta(u) + g(u) \ni \theta \text{ in } Q_T, \quad (1)$$

$$\partial_t u_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma) + \left(\frac{Du}{|Du|} \right) \cdot n_\Gamma + \beta_\Gamma(u_\Gamma) + g_\Gamma(u_\Gamma) \ni \theta_\Gamma, \text{ and } u|_\Gamma = u_\Gamma \text{ on } \Sigma_T, \quad (2)$$

$$u(0, \cdot) = u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma(0, \cdot) = u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma. \quad (3)$$

ここに、 n_Γ は外向き単位法線ベクトルを表す。“ $|_\Gamma$ ” は Γ 上のトレースを表し、“ Δ_Γ ” は Laplace–Beltrami 作用素を表す。 $\theta : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta_\Gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられた熱源とし、 $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u_{\Gamma,0} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ未知変数 u, u_Γ の初期値を表す。(1) は未知変数 $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ を持つ特異拡散方程式と呼ばれる偏微分方程式である。(S)_ε の境界条件 (2) は、一般に力学的境界条件 (**dynamic boundary condition**) と呼ばれる。この境界条件は未知変数 $u_\Gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ をもつ放物型偏微分方程式と、接合条件 “ $u|_\Gamma = u_\Gamma$ on Σ_T ” から構成されており、時間によって境界が動的に変化する様子を捉えることができると考えられる。したがって、(S)_ε は 2 つの未知変数を持つシステム (連立偏微分方程式) とみなすことができる。

(S)_ε は Visintin [22, Chapter VI] により提唱された、メゾスコピックスケールでの物質の凝固・融解相転移現象を記述する数学モデルをアレンジしたものである。一般に (S)_ε のような相転移現象を表す方程式を Allen–Cahn 型方程式といい、二重井戸型の関数を含む自由エネルギーと呼ばれる汎関数の勾配流によって得られる。本システム (S)_ε の場合は以下の汎関数が対応する。

*本研究は儀我 美一 氏 (東京大学), Rybka, Piotr 氏 (Warsaw 大学), 白川 健 氏 (千葉大学) との共同研究に基づく。

[†]〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 千葉大学大学院 理学研究科 基盤理学専攻 数学・情報数理学コース. e-mail: nakayashiki1108@chiba-u.jp

$$[u, u_\Gamma] \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(u, u_\Gamma) := \int_\Omega |Du| + \int_\Gamma |u|_\Gamma - u_\Gamma| d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon u_\Gamma)|^2 d\Gamma \\ + \int_\Omega (B(u) + G(u)) dx + \int_\Gamma (B_\Gamma(u_\Gamma) + G_\Gamma(u_\Gamma)) d\Gamma, \text{ if } u \in BV(\Omega), \varepsilon u_\Gamma \in H^1(\Gamma).$$

“ $w \in BV(\Omega) \mapsto \int_\Omega |Dw|$ ” は全変動汎関数を表す. “ $d\Gamma$ ” は Γ の面積要素, “ ∇_Γ ” は Γ 上の勾配を表す. また $B: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, $B_\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ はそれぞれ与えられた適正下半連続関数であり, それぞれの劣微分を $\beta = \partial B$, $\beta_\Gamma = \partial B_\Gamma$ とする. $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G_\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ C^1 -級関数であり, それぞれの微分を $g = G'$, $g_\Gamma = G'_\Gamma$ とする.

先述の二重井戸型関数はエネルギー汎関数において $B = B(u)$, $G = G(u)$ と $B_\Gamma = B_\Gamma(u_\Gamma)$, $G_\Gamma = G_\Gamma(u_\Gamma)$ にはそれぞれ和 “ $B(u) + G(u)$ ” と “ $B_\Gamma(u_\Gamma) + G_\Gamma(u_\Gamma)$ ” が対応しており, 相転移現象で2つの安定状態が共存する状況を再現する役割をする. これらの関数の具体例は次のようなものである (cf. [22]).

$$B(\sigma) = B_\Gamma(\sigma) = \mathcal{I}_{[-1,1]}(\sigma) \text{ and } G(\sigma) = G_\Gamma(\sigma) = -\frac{1}{2}\sigma^2, \text{ for } \sigma \in \mathbb{R},$$

ここに, $\mathcal{I}_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上の指示関数である:

$$\sigma \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{I}_{[-1,1]}(\sigma) := \begin{cases} 0, & \text{if } \sigma \in [-1, 1], \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この具体例を含むように, それぞれの関数 B, G と B_Γ, G_Γ に適切な仮定をする.

本研究の目標は, $(S)_\varepsilon$ のような力学的境界条件下での特異拡散方程式を数学的に解析することである. その目標を達成するために, 次の近似問題 $(RS)_\varepsilon^\nu$ ($\varepsilon > 0, \nu > 0$) を考える.

$(RS)_\varepsilon^\nu$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} + \nu^2 \nabla u \right) + \beta(u) + g(u) \ni \theta \text{ in } Q, \\ \partial_t u_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma) + \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} + \nu^2 \nabla u \right) \cdot n_\Gamma + \beta_\Gamma(u_\Gamma) + g_\Gamma(u_\Gamma) \ni \theta_\Gamma, \text{ and } u|_\Gamma = u_\Gamma \text{ on } \Sigma, \\ u(0, \cdot) = u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma(0, \cdot) = u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma. \end{cases}$$

この近似問題 $(RS)_\varepsilon^\nu$ は特異拡散方程式 (1) の特異性を正則化項 $\nu^2 \nabla u$ により緩和したシステムである. またシステム $(RS)_\varepsilon^\nu$ は, 先行研究 (cf. [7]) により以下の結果を得ている.

(A) $\varepsilon \geq 0$ のときの $(RS)_\varepsilon^\nu$ の解の数学的表現を含む解の適切性.

(B) $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \geq 0$ と極限移行したときのシステムの連続依存性.

本研究では, システム $(S)_\varepsilon$ を上記の近似システム $(RS)_\varepsilon^\nu$ による $\nu \rightarrow 0$ としたときの極限問題として考察する. 特異拡散方程式の解の関数は一般に, 有界変動関数 (BV 関数) と呼ばれる関数である. この BV 関数とは, 境界で不連続性をもつ関数 (例えば, Heaviside 関数) を含む. したがって, 力学的境界条件における接合条件 $u|_\Gamma = u_\Gamma$ on Σ_T が一般に成立しなくなるため, 自由エネルギーにおいて接合条件が L^1 -積分 $\int_\Gamma |u|_\Gamma - u_\Gamma| d\Gamma$ に置き換わる. しかしシステムがエネルギーの勾配流であることから, このエネルギーが接合条件の数学的表現を変化させる. これらを踏まえ, 本講演では $(S)_\varepsilon$ に対しても上記の (A), (B) が成立するかどうか詳細を述べる.

2 記号の準備

記号および主定理を述べる上で必要な準備をする。

記号 1. $d \in \mathbb{N}$ を任意の次元とする. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して, $|a|$ は通常の Euclid ノルム, $a \cdot b$ を通常のスカラー積とする. また $a \otimes b$ をテンソル積とする.

記号 2. X を Banach 空間とする. $|\cdot|_X$ は X のノルムとし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X と X^* との双対写像を表す. もし X が Hilbert 空間ならば, $(\cdot, \cdot)_X$ は内積と定義する.

X は Hilbert 空間とする. X 上の適正下半連続凸 (汎) 関数 ϕ を考える. $D(\phi)$ は凸関数 ϕ の有効領域を表し, $\partial\phi$ は劣微分作用素 (以下, 劣微分) を表す. 一般に劣微分は, $X^2 := X \times X$ 上の集合値関数で与えられ, 極大単調作用素であることが知られている (cf [3,5,6,10]). 特に任意の $z_0 \in X$ に対し, 劣微分は次の変分不等式によって定義される.

$$(z_0^*, z - z_0)_X \leq \phi(z) - \phi(z_0), \text{ for any } z \in D(\phi).$$

ここに, $D(\partial\phi) := \{z \in X \mid \partial\phi(z) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分の表現の 1 つの例として次の符号関数 (Sgn 関数) と呼ばれる集合値関数 $\text{Sgn} : \mathbb{R}^N \rightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$ を次で定義する.

$$\omega \in \mathbb{R}^N \mapsto \text{Sgn}(\omega) := \begin{cases} \frac{\omega}{|\omega|}, & \text{if } \omega \neq 0, \\ \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

関数 Sgn は Euclid ノルム $|\cdot| : \omega \in \mathbb{R}^N \mapsto |\omega| := \sqrt{\omega \cdot \omega} \in [0, \infty)$ の劣微分と一致する. すなわち, $\text{Sgn} = \partial|\cdot|$ である.

次に主定理の証明の鍵となる凸関数の収束, “Mosco 収束” を定義する.

定義 1 (Mosco 収束: cf. [15]). X を Hilbert 空間とする. $\phi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸関数, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ を適正下半連続凸関数の列で, $\phi_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, ϕ_n が ϕ に **Mosco 収束** するとは, 次の条件 (M1), (M2) を満たすことをいう.

(M1) Lower-bound: 任意の $\tilde{z} \in X$ と $\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ に対して, “ $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$ weakly in X , as $n \rightarrow \infty$ ” を満たすならば, “ $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\tilde{z}_n) \geq \phi(\tilde{z})$ ” が成り立つ.

(M2) Optimality: 任意の $\hat{z} \in D(\phi)$ に対して, 次を満たす列 $\{\hat{z}_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が存在する:

$$\hat{z}_n \rightarrow \hat{z} \text{ in } H \text{ and } \phi_n(\hat{z}_n) \rightarrow \phi(\hat{z}), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

記号 3 (cf. [1,4]). \mathcal{L}^d を d 次元 Lebesgue 測度, \mathcal{H}^d を d 次元 Hausdorff 測度とする. 滑らかな境界 S に対して, S 上の面積要素を dS と書くことにする.

$A \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とする. このとき $\mathcal{M}(A)$ を有限 Radon 測度集合とする. 一般に, $\mathcal{M}(A)$ は Banach 空間 $C_0(A)$ の双対空間である.

記号 4 (BV-theory: cf. [1, 4, 8, 9]). $A \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とする. 任意の $u \in L^1(A)$ が超関数の意味の微分 Du が A 上の有限 Radon 測度 (すなわち $Du \in \mathcal{M}(A)$) となるとき, u を A 上の有界変動関数 (**function of bounded variation**)[‡] という. 有界変動関数全体の集合を $BV(A)$ と表す. また任意の $u \in BV(A)$ に対して, u のノルムを次で与えると $BV(A)$ は Banach 空間になる.

$$|u|_{BV(A)} := |u|_{L^1(A)} + |Du|(A), \text{ for } u \in BV(A).$$

ここに $|Du|$ は Du の全変動 (**total variation**) と呼び, $|Du|(A)$ の値は次で与えられる.

$$|Du|(A) = \sup \left\{ \int_A u \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(A)^d \text{ and } |\varphi| \leq 1 \text{ on } A \right\}.$$

さらに, 任意の $u \in BV(A)$ と関数列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset BV(A)$ が[§]

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^1(A) \text{ and } \int_A |Du_n| \rightarrow \int_A |Du|, \text{ as } n \rightarrow \infty$$

を満たすとき, “ $u_n \rightarrow u$ strictly in $BV(A)$ ” と書く (strict topology という).

$1 \leq p < d/(d-1)$ とし, 開集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の境界 ∂A が Lipschitz ならば $BV(A)$ は $L^d(A)$ にコンパクトな埋め込みである (cf. [1, Corollary 3.49], [4, Theorem 10.1.3-10.1.4]). また BV-関数に対するトレース作用素と呼ばれる線形作用素 $\gamma_{\partial A} : BV(A) \rightarrow L^1(\partial A)$ が一意的に存在し, 次を満たす.

$$\int_{\partial A} \gamma_{\partial A} u (\varphi \cdot n_\Gamma) d\Gamma = \int_A u \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_A \varphi \cdot Du, \text{ for any } \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

また “ $u_n \rightarrow u$ strictly in $BV(A)$, as $n \rightarrow \infty$ ” ならば “ $\gamma_{\partial A} u_n \rightarrow \gamma_{\partial A} u$ in $L^1(\partial A)$, as $n \rightarrow \infty$ ” を満たす.

記号 5 (cf. [17]). $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とし, $n_\Gamma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ は外向き単位法線ベクトルとする. さらに, 距離 $x \in \mathbb{R}^N \mapsto d_\Gamma(x) := \inf_{y \in \Gamma} |x - y| \in \mathbb{R}$ を定義する. この距離関数は Γ 上の近傍で C^∞ -関数を形成する[§]. これらを基に, **Laplace-Beltrami** 作用素 “ Δ_Γ ” を定義する. そのために, Γ 上の勾配を表す “ ∇_Γ ” (surface-gradient) および, Γ 上の発散を表す “ $\operatorname{div}_\Gamma$ ” (surface-divergence) を次のように定義する.

$$\begin{cases} \cdot \varphi \in C^1(\Gamma) \mapsto \nabla_\Gamma \varphi := \nabla \varphi^{\text{ex}} - (\nabla d_\Gamma \otimes \nabla d_\Gamma) \nabla \varphi^{\text{ex}} \in L^2_{\text{tan}}(\Gamma) \cap C(\Gamma; \mathbb{R}^N), \\ \cdot \omega \in C^1(\Gamma)^N \mapsto \operatorname{div}_\Gamma \omega := \operatorname{div} \omega^{\text{ex}} - \nabla(\omega^{\text{ex}} \cdot \nabla d_\Gamma) \cdot \nabla d_\Gamma \in C(\Gamma). \end{cases}$$

ここに,

$$L^2_{\text{tan}}(\Gamma) := \{ \tilde{\omega} \in L^2(\Gamma; \mathbb{R}^N) \mid \tilde{\omega} \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma \}$$

である. ∇_Γ は $H^1(\Gamma)$ から $L^2_{\text{tan}}(\Gamma)$ への線形作用素として拡張することができ, その拡張は Hilbert 空間 $H^1(\Gamma)$ の内積を用いて, 次のように表せる.

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Gamma)} := (\varphi, \psi)_{L^2(\Gamma)} + (\nabla_\Gamma \varphi, \nabla_\Gamma \psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \text{ for } \varphi, \psi \in H^1(\Gamma).$$

[‡]しばしば頭文字をとって有界変動関数のことを **BV-関数** という.

[§]詳しい空間等の仮定は [16] を参照.

さらに $\operatorname{div}_\Gamma$ は $L^2(\Gamma; \mathbb{R}^N)$ から $H^{-1}(\Gamma)$ への作用素として拡張可能である。これを踏まえると、 $-\Delta_\Gamma = -\operatorname{div}_\Gamma \circ \nabla_\Gamma : H^1(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$ は双対写像を用いて、次のように表せる。

$$\langle -\Delta_\Gamma \varphi, \psi \rangle_{H^1(\Gamma)} = (\nabla_\Gamma \varphi, \nabla_\Gamma \psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \text{ for } [\varphi, \psi] \in H^1(\Gamma)^2.$$

この節の最後に、本問題を考察する上で重要な定理を2つ紹介する。

定理 1 (boundary operator: cf. [10]). $\omega \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mapsto \omega|_\Gamma n_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ は次で与えられる有界線形汎関数 $\mathcal{B}_\Gamma : L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$ が存在する。

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_\Gamma \omega, z|_\Gamma \rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} &:= \int_\Omega \operatorname{div} \omega z \, dx + \int_\Omega \omega \cdot \nabla z \, dx, \\ &\text{for all } \omega \in L^2_{\operatorname{div}}(\Omega), \text{ and } z \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

ここに、

$$L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) := \{ \tilde{\omega} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div} \tilde{\omega} \in L^2(\Omega) \}.$$

定理 2 (pairing measure: cf. [2]). 任意の $z \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, およびベクトル値関数 $\omega \in L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ に対して、超関数の意味での微分 $(\omega, Dz) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を以下で定義する。

$$\langle (\omega, Dz), \varphi \rangle := - \int_\Omega \varphi (\operatorname{div} \omega) z \, dx - \int_\Omega (\omega \cdot \nabla \varphi) z \, dx, \text{ for any } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

これを pairing measure という。このとき、次が成り立つ。

(i) 次のことから、 (ω, Dz) は Radon 測度であることが分かる。

$$\left| \int_E (\omega, Dz) \right| \leq \int_E |(\omega, Dz)| \leq |\omega|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)} \int_E |Dz|, \text{ for any } E : \text{Borel set}$$

(ii) 点列 $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ が “ $\zeta_n \rightarrow z$ strictly in $BV(\Omega)$, as $n \rightarrow \infty$ ” を満たすならば、次が成り立つ。

$$\int_\Omega (\omega, D\zeta_n) \rightarrow \int_\Omega (\omega, Dz), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

さらに、次を満たす有界線形作用素 $[\cdot, n_\Gamma] : L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow L^\infty(\Gamma)$ が存在し、定理 1 によって与えられた boundary operator と一致する。

(iii) $\|[\omega, n_\Gamma]\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq |\omega|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}$, for any $\omega \in L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$

(iv) 次は成り立つ。

$$\int_\Omega (\omega, Dz) = - \int_\Omega \operatorname{div} \omega z \, dx + \int_\Gamma [\omega, n_\Gamma] z|_\Gamma \, d\Gamma.$$

3 主定理

以上を踏まえ主定理を述べる. まず解の基礎空間を次のようにおく.

$$\mathcal{H} := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).$$

また本研究では, 以下を仮定する.

(A1) $\beta = \partial B \subset \mathbb{R}^2$, $\beta_\Gamma = \partial B_\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ はそれぞれ凸関数 $B : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, $B_\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ の劣微分として表される極大単調作用素とし, さらに次の (a1)-(a3) を満たす.

(a1) $B(0) = 0$, $B_\Gamma(0) = 0$ and $[0, 0] \in \beta$, $[0, 0] \in \beta_\Gamma$ on \mathbb{R}^2 ;

(a2) 以下を満たす 1 次元区間 $I_B \subset \mathbb{R}$ が存在する:

$$\text{int}I_B \neq \emptyset, D(\beta) = D(\beta_\Gamma) = I_B \text{ and } B, B_\Gamma \in C(\overline{I_B}) \cap L^\infty(I_B);$$

(a3) 次の不等式を満たす定数 $a_k > 0$, $b_k > 0$ ($k = 0, 1$) が存在する:

$$a_0|[\beta]^\circ(\tau)| - b_0 \leq |[\beta]^\circ(\tau)| \leq a_1|[\beta_\Gamma]^\circ(\tau)| + b_1, \text{ for } \tau \in I_B$$

ただし $[\beta]^\circ$, $[\beta_\Gamma]^\circ$ はそれぞれ β , β_Γ の minimal section を表す.

(A2) $g = G'$, $g_\Gamma = G'_\Gamma$ を $\overline{I_B}$ 上 Lipschitz 連続な関数とする.

(A3) 熱源と初期値に次を仮定する.

$$[\theta, \theta_\Gamma] \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ and } [u_0, u_{\Gamma,0}] \in \overline{D(\mathcal{F}_\varepsilon)}.$$

次に問題 $(S)_\varepsilon$ の弱解を以下で定義する.

解の定義. 以下 (S1), (S2) を満たす関数の組を $[u, u_\Gamma]$ を $(S)_\varepsilon$ の弱解と定義する.

(S1) $[u, u_\Gamma] \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$, $|Du(\cdot)|(\Omega) \in L^\infty(0, T)$, $u_\Gamma \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))$,
 $\varepsilon u_\Gamma \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma))$, and $[u(0), u_\Gamma(0)] = [u_0, u_{\Gamma,0}]$ in \mathcal{H} .

(S2) $[u, u_\Gamma]$ は以下の変分不等式を満たす.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\partial_t u(t) + g(u(t)) - \theta(t))(u(t) - z) dx + \int_{\Omega} |Du(t)| \\ & + \int_{\Gamma} (\partial_t u_\Gamma(t) + g_\Gamma(u_\Gamma(t)) - \theta_\Gamma(t))(u_\Gamma(t) - z_\Gamma) d\Gamma + \int_{\Gamma} |u_{|\Gamma}(t) - u_\Gamma(t)| d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_\Gamma(\varepsilon u_\Gamma(t))|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} B(u(t)) dx + \int_{\Gamma} B_\Gamma(u_\Gamma(t)) d\Gamma \\ & \leq \int_{\Omega} |Dz| + \int_{\Gamma} |z_{|\Gamma} - z_\Gamma| d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_\Gamma(\varepsilon z_\Gamma)|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} B(z) dx + \int_{\Gamma} B_\Gamma(z_\Gamma) d\Gamma. \end{aligned}$$

ただし, $[z, z_\Gamma] \in (BV(Q) \cap L^2(Q)) \times L^2(\Sigma)$ は任意である.

さて上記の仮定および定義を基に, 主定理を述べる.

主定理 1 は弱解の数学的表現である. ここでは, エネルギーの汎関数において接合条件 $u_{|\Gamma} = u_\Gamma$ on Σ_T と置き換わった境界積分 $\int_{\Gamma} |u_{|\Gamma} - u_\Gamma| d\Gamma$ の弱形式を与えている.

主定理 1 (解の数学的表現). $\varepsilon \geq 0$ とする. 次を満たすベクトル場 $\boldsymbol{\nu}_\Omega^* \in L^\infty(Q; \mathbb{R}^N)$, 関数 $\mu_\Gamma^* \in L^\infty(\Sigma)$ および関数の組 $[\xi, \xi_\Gamma] \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ が存在する.

(i) $|\boldsymbol{\nu}_\Omega^*| \leq 1$, a.e. in Q , and $|Du(t)| = (\boldsymbol{\nu}_\Omega^*(t), Du(t))$ in $\mathcal{M}(\Omega)$, a.e. $t \in (0, T)$;

(ii) $\mu_\Gamma^* = [\boldsymbol{\nu}_\Omega^* \cdot \boldsymbol{n}_\Gamma]_{|\Gamma} : \Sigma \rightarrow [-1, 1]$;

(iii) $\xi \in \beta(u)$, a.e. in Q , and $\xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma)$, a.e. on Σ .

さらに上記を満たす関数と弱解 $[u, u_\Gamma]$ が以下の放物型偏微分方程式を満たす.

$$\begin{cases} \partial_t u(t) - \operatorname{div} \boldsymbol{\nu}_\Omega^*(t) + \beta(u(t)) + g(u(t)) = \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega), \\ \partial_t u_\Gamma(t) - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma(t)) + \mu_\Gamma^*(t) + \beta_\Gamma(u_\Gamma(t)) + g_\Gamma(u_\Gamma(t)) = \theta_\Gamma(t) \text{ in } L^2(\Gamma), \\ -\mu_\Gamma^* \in \operatorname{Sgn}(u_{|\Gamma}(t) - u_\Gamma(t)), \text{ a.e. on } \Gamma, \text{ a.e. } t \in (0, T), \\ u(0, \cdot) = u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma(0, \cdot) = u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma. \end{cases}$$

主定理 2 は比較原理である. 一般に変分不等式の場合, 比較原理は成立しない. しかし, Kenmochi (cf. [11]) による一般論を適用することにより本システムの弱解に比較原理を示すことができる.

主定理 2 (弱解に対する比較原理) $[\theta^{(i)}, \theta_\Gamma^{(i)}] \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, $[u_0^{(i)}, u_{\Gamma,0}^{(i)}] \in D(\mathcal{F}_\varepsilon)$ をそれぞれ弱解 $[u^{(i)}, u_\Gamma^{(i)}]$ に対する熱源, 初期値とする ($i = 1, 2$). 熱源と初期値に次を仮定する.

$$\begin{cases} \theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}, \text{ a.e. in } Q, \text{ and } u_0^{(1)} \leq u_0^{(2)}, \text{ a.e. in } \Omega, \\ \theta_\Gamma^{(1)} \leq \theta_\Gamma^{(2)}, \text{ a.e. on } \Sigma, \text{ and } u_{\Gamma,0}^{(1)} \leq u_{\Gamma,0}^{(2)}, \text{ a.e. on } \Gamma. \end{cases}$$

このとき, 弱解 $[u^{(i)}, u_\Gamma^{(i)}]$ に次の関係が成り立つ.

$$u^{(1)} \leq u^{(2)}, \text{ a.e. in } Q, \text{ and } u_\Gamma^{(1)} \leq u_\Gamma^{(2)}, \text{ a.e. on } \Sigma.$$

最後はシステムの連続依存性である. 2 節の記号 4 により述べたが $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ ($L^2(\Omega)$ に対してコンパクトな埋め込みでない) のため $C([0, T]; \mathcal{H})$ の位相の収束を得るのは難しいが, 適切な定式化により結果を得ることができる.

主定理 3 (システムの連続依存性). $\varepsilon_0 \geq 0$ とする. システム $(S)_{\varepsilon_0}$ の解を $[u_{\varepsilon_0}, u_{\Gamma, \varepsilon_0}] \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ とし, そのときの熱源を $[\theta_{\varepsilon_0}, \theta_{\Gamma, \varepsilon_0}]$, 初期値を $[u_{0, \varepsilon_0}, u_{\Gamma, 0, \varepsilon_0}] \in \mathcal{H}$ とする. 同様に $(RS)_\varepsilon^\nu$ の解の列を $\{[u_\varepsilon^\nu, u_{\Gamma, \varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon, \nu > 0} \subset L^2(0, T; \mathcal{H})$ としたときの熱源と初期値の列をそれぞれ $\{[\theta_\varepsilon^\nu, \theta_{\Gamma, \varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon, \nu > 0} \subset L^2(0, T; \mathcal{H})$, $\{[u_{0, \varepsilon}^\nu, u_{\Gamma, 0, \varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon, \nu > 0} \subset \mathcal{H}$ とする. 次を仮定する.

$$\begin{cases} [\theta_\varepsilon^\nu, \theta_{\Gamma, \varepsilon}^\nu] \rightarrow [\theta_{\varepsilon_0}, \theta_{\Gamma, \varepsilon_0}] \text{ in } L^2(0, T; \mathcal{H}), \\ [u_{0, \varepsilon}^\nu, u_{\Gamma, 0, \varepsilon}^\nu] \rightarrow [u_{0, \varepsilon_0}, u_{\Gamma, 0, \varepsilon_0}] \text{ in } \mathcal{H}, \end{cases} \text{ as } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0, \nu \rightarrow 0.$$

このとき, 以下が成り立つ.

$$[u_\varepsilon^\nu, u_{\Gamma, \varepsilon}^\nu] \rightarrow [u_{\varepsilon_0}, u_{\Gamma, \varepsilon_0}] \text{ in } C([0, T]; \mathcal{H}), \text{ and } \int_0^T \int_\Omega |Du_\varepsilon^\nu| \rightarrow \int_0^T \int_\Omega |Du_{\varepsilon_0}|, \text{ as } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0, \nu \rightarrow 0.$$

4 証明の概要

主定理を証明するために, $U := [u, u_\Gamma]$ in $L^2(0, T; \mathcal{H})$, $\Theta := [\theta, \theta_\Gamma]$ in $L^2(0, T; \mathcal{H})$, $U_0 := [u_0, u_{\Gamma,0}]$ in \mathcal{H} とおき, システム $(S)_\varepsilon$ を次で与えられる劣微分作用素によって支配された発展方程式の抽象 Cauchy 問題の枠組みとして捉え直す.

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + \partial\Phi_\varepsilon(U(t)) + \mathcal{G}(U(t)) \ni \Theta(t) \text{ in } \mathcal{H}, \text{ a.e. } t \in (0, T), \\ U(0) = U_0 \text{ in } \mathcal{H}. \end{cases} \quad (4)$$

$\partial\Phi_\varepsilon$ は適正下半連続凸関数 $\Phi_\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, \infty]$ の劣微分を表し, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned} W &= [w, w_\Gamma] \in \mathcal{H} \mapsto \Phi_\varepsilon(W) = \Phi_\varepsilon(w, w_\Gamma) \\ &:= \begin{cases} \int_\Omega |Dw| + \int_\Gamma |w|_\Gamma - w_\Gamma| d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon w_\Gamma)|^2 d\Gamma \\ \quad + \int_\Omega B(w) dx + \int_\Gamma B_\Gamma(w_\Gamma) d\Gamma, & \text{if } w \in BV(\Omega), w_\Gamma \in H^1(\Gamma), \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

(4) の定式化により, システム $(S)_\varepsilon$ の一意解の存在は発展方程式の一般論 (cf. [5, 6]) により明らかである. このとき主定理は, 凸関数 Φ_ε が Mosco 収束するかどうかポイントであるため, 先行研究 (cf. [16]) で構成された近似列を用いる. 本講演では, Mosco 収束がそれぞれの主定理の証明にどのように活用されるかについて詳しく述べる.

5 応用

本節では, これまでの研究の応用として以下の準線形放物型偏微分方程式のシステムを考える. (ただし, $\nu > 0, \varepsilon \geq 0$)

(KWC) $_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \Delta \eta + g(\eta) + \alpha'(\eta) |\nabla \theta| = 0 \text{ in } Q := (0, \infty) \times \Omega, \\ \nabla \eta \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma := (0, \infty) \times \Gamma, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0(\eta) \partial_t \theta - \operatorname{div} \left(\alpha(\eta) \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|} + \nu^2 \nabla \theta \right) = 0 \text{ in } Q, \\ \partial_t \theta_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 \theta_\Gamma) + \left(\alpha(\eta) \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|} + \nu^2 \nabla \theta \right)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma = 0, \text{ and} \\ \theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma \text{ on } \Sigma, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), x \in \Omega, \text{ and } \theta_\Gamma(0, y) = \theta_{\Gamma,0}(y), y \in \Gamma. \end{cases} \quad (6)$$

システム (KWC) $_\varepsilon$ は, Kobayashi et-al. (cf. [12]) により提唱された結晶粒界運動を記述する数学モデルをアレンジしたものであり, 2つの初期値境界値問題 (5), (6) から構成されてい

る. 以後このシステムを **Kobayashi–Warren–Carter** システムと呼ぶ. 本システムは, 以下の自由エネルギー $\mathcal{F} : L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma) \rightarrow [0, \infty]$ の勾配流として導かれる:

$$\mathcal{F}(\eta, \theta, \theta_\Gamma) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{\Omega} G(\eta) dx + \int_{\Omega} \alpha(\eta) |\nabla \theta| dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma}(\varepsilon \theta_{\Gamma})|^2 d\Gamma, \quad (7)$$

if $[\eta, \theta, \theta_{\Gamma}] \in H^1(\Omega)^2 \times H^{1/2}(\Gamma)$, $\varepsilon \theta_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$, and $\theta|_{\Gamma} = \theta_{\Gamma}$ on Γ .

ここに, システム $(\text{KWC})_{\varepsilon}$ の未知変数 $\eta = \eta(t, x)$ と $\theta = \theta(t, x)$ のそれぞれは, 多結晶体内の結晶粒の「配向度」と「方位角」を表す相関数である. θ_{Γ} は方位角 θ の境界熱源であるが, ここではこの θ_{Γ} を未知変数として加えることで, Ω の外部が動的に変化する状況にも対応可能な枠組みでシステムが構成されている. また $0 < \alpha_0 \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R})$ と $0 < \alpha \in C^2(\mathbb{R})$ はそれぞれ速度のモビリティと空間拡散のモビリティであり, α' は α の微分を表す. $\eta_0, \theta_0 \in L^2(\Omega)$ と $\theta_{\Gamma,0} \in L^2(\Gamma)$ はそれぞれ与えられた初期値である.

Kobayashi–Warren–Carter システムの数学解析は, 現在までに様々な条件下で研究の成果が挙げられている (cf. [13, 14, 18–21]). しかしながら, 多くの先行研究では, 外力を定数とする等の静的な状況に的が絞られており, これらの結果を実際の現象に見られる多様な動的变化の考察に応用するには, まだ数学理論の整備が必要な状況である.

上述のような背景のもとで, 本研究では Kobayashi–Warren–Carter システムの数学解析において, より高度な動的变化にも対応可能な数学理論を確立することを大きな目標とする. その第一段階として, システム $(\text{KWC})_{\varepsilon}$ における初期値境界値問題 (6) に力学的境界条件を課した場合を考える. (6) のような力学的境界条件下での特異性を含む準線形拡散方程式に対する数学解析は, 先行研究 (cf. [7]) によって定式化が成されている.

以上を踏まえ, 本研究ではシステム $(\text{KWC})_{\varepsilon}$ の数学解析において先行研究 [7] と同様の定式化によって数学解析が可能かどうか検証するため, 自由エネルギー (7) に適切な式変形を施し, 以下の課題について得られた結果を報告する.

- (A) システム $(\text{KWC})_{\varepsilon}$ の解 $[\eta, \theta, \theta_{\Gamma}]$ の存在及び解の数学的表現.
- (B) $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ としたときのシステムの連続依存性.
- (C) 解 $[\eta, \theta, \theta_{\Gamma}]$ の時間無限大での解挙動とシステム $(\text{KWC})_{\varepsilon}$ の定常問題との関連性の考察.

参考文献

- [1] Ambrosio, L.; Fusco, N.; Pallara, D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [2] Anzellotti, G. Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **135**: 293–318 (1984), 1983.
- [3] Attouch, H. *Variational Convergence for Functions and Operators*. Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.
- [4] Attouch, H.; Buttazzo, G.; Michaille, G. *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces*, Vol. 6 of *MPS/SIAM Series on Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2006. Applications to PDEs and optimization.

- [5] Barbu, V. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2010.
- [6] Brézis, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [7] Colli, P.; Gilardi, G.; Nakayashiki, R.; Shirakawa, K. A class of quasi-linear Allen–Cahn type equations with dynamic boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, **158**: 32–59, 2017.
- [8] Evans, L. C.; Gariepy, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised edition, 2015.
- [9] Giusti, E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Vol. 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [10] Kenmochi, N. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.* <http://ci.nii.ac.jp/naid/110004715232>, **30**: 1–87, 1981.
- [11] Kenmochi, N.; Mizuta, Y.; Nagai, T. Projections onto convex sets, convex functions and their subdifferentials. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.* <http://ci.nii.ac.jp/naid/110004715212>, **29**: 11–22, 1980.
- [12] Kobayashi, R.; Warren, J. A.; Carter, W. C. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, **140**(1-2): 141–150, 2000.
- [13] Moll, S.; Shirakawa, K. Existence of solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **51**(3-4): 621–656, 2014.
- [14] Moll, S.; Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy dissipative solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Nonlinearity*, **30**(7): 2752–2784, 2017.
- [15] Mosco, U. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, **3**: 510–585, 1969.
- [16] Nakayashiki, R.; Shirakawa, K. Weak formulation for singular diffusion equations with dynamic boundary condition. Springer INdAM Series. to appear, 2017.
- [17] Savaré, G.; Visintin, A. Variational convergence of nonlinear diffusion equations: applications to concentrated capacity problems with change of phase. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **8**(1): 49–89, 1997.
- [18] Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N. Solvability of one-dimensional phase field systems associated with grain boundary motion. *Math. Ann.*, **356**(1): 301–330, 2013.
- [19] Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **7**(1): 139–159, 2014.
- [20] Shirakawa, K.; Watanabe, H. Large-time behavior for a PDE model of isothermal grain boundary motion with a constraint. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **1**(Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl.): 1009–1018, 2015.
- [21] Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N. Phase-field systems for grain boundary motions under isothermal solidifications. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **24**(2): 353–400, 2014.
- [22] Visintin, A. *Models of Phase Transitions*, Vol. 28 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.