双曲型Stokes方程式の解に対する局所エネルギー減衰定理*

中村 憲史 (Kenji Nakamura)

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻博士後期課程 2 年

1 導入

非圧縮性粘性流体の運動は, 次の Navier-Stokes 方程式で記述される：

$$\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = \mathrm{Div}\,2S, \quad \nabla\cdot u = 0 \quad \mathrm{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{NS}$$

ただし, Ω は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ n 次元 $(n\geq 2)$ 外部領域とし, $u = u(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$ は流速, $\pi = \pi(x,t)$ は圧力を表す. また, 変形速度テンソル $S = (S_{jk})_{j,k=1}^n$ と $\mathrm{Div}\,S$ はそれぞれ次で与えられる：

$$S_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j), \quad \mathrm{Div}\,S = \big(\sum_{j=1}^n \partial_j S_{jk}\big)_{k=1}^n.$$

非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ と合わせて $\mathrm{Div}\,2S = \Delta u$ が従う. (NS) については数多くの研究結果が知られており, [5] では $n\geq 3$ の場合について, (NS) の線形化問題の解に対する局所エネルギー減衰定理が示され, L^p-L^q 減衰評価が得られた. そして, 小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が示された. また, [1], [3] では (NS) の線形化問題の解に対する局所エネルギー減衰定理と, L^p-L^q 減衰評価が $n=2$ の場合についても示された.

本稿では, (NS) における変形速度テンソルが次の関係で与えられる場合を考える：

$$S + \tau S_t = \frac{\nu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)_{j,k=1}^n.$$

ここで, $\tau > 0$ であり, 上式の左辺は形式的には $S(t+\tau)$ の 1 次近似となる. 非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ と合わせれば $\mathrm{Div}\,2(S+\tau S_t) = \Delta u$ が従い, 次の双曲型 Navier-Stokes 方程式を得る：

$$\begin{cases} \tau u_{tt} - \Delta u + u_t + \nabla\pi + \tau\nabla\pi_t = -\tau(u\cdot\nabla)u_t - ((\tau u_t + u)\cdot\nabla)u & \mathrm{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ \nabla\cdot u = 0 & \mathrm{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (u,u_t)|_{t=0} = (u_0,v_0). \end{cases} \tag{HNS}$$

(HNS) の小さな初期値に対する可解性については, 全空間の場合は [7], [8] などで示されている. しかし, 外部領域の場合については, (NS) の場合とは対照的に我々の知る限り研究結果がない. そこで (HNS) を解析するための第一歩として, 線形化問題の解析をおこなった.

*本研究は小林孝行氏 (大阪大学), 久保隆徹氏 (筑波大学) との共同研究に基づく.

以後, $v = u_t$, $\mathbb{U} = {}^T(u, v)$, $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n \,|\, \nabla \cdot u = 0 \,\mathrm{in}\, \Omega\}$ とし, L^2 ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. また,

$$L_\sigma^2(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}, \quad \widehat{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\nabla\cdot\|}, \quad G(\Omega) = \{\pi \in L_{loc}^2(\Omega) \,|\, \nabla\pi \in L^2(\Omega)^n\}$$

と定める. このとき, Helmholtz 分解 $L^2(\Omega)^n = L_\sigma^2(\Omega) \oplus G(\Omega)$ が成り立つことが知られており, 連続射影 $P\colon\, L^2(\Omega)^n \to L_\sigma^2(\Omega)$ を Helmholtz 射影という. Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ を用いて, 作用素 $\mathbb{A}$ を次で定義する：

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau}A & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}.$$

(HNS) の線形化問題で, Helmholtz 射影を施したものは次で与えられる：

$$\mathbb{U}_t = \mathbb{A}\mathbb{U} \quad \text{for } t > 0, \quad \mathbb{U}(0) = \mathbb{U}_0.$$

ただし, $\mathbb{U}_t = {}^T(u_t, v_t)$, $\mathbb{U}_0 = {}^T(u_0, v_0)$ である. ここで, Hilbert 空間 $\mathscr{H}(\Omega)$ を

$$\mathscr{H}(\Omega) = \left\{\mathbb{U} = {}^T(u, v) \,|\, u \in \widehat{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega), v \in L_\sigma^2(\Omega)\right\}$$

として, 内積とノルムはそれぞれ次のものとする：

$$(\mathbb{U}, \mathbb{W})_{\mathscr{H}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla w) + \tau(v, z), \quad \|\mathbb{U}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} = \left(\|\nabla u\|^2 + \tau\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

ただし, $\mathbb{W} = {}^T(w, z)$ とした. また, $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| < r\}$, r_0 を $\Omega^c \subset B_{r_0}$ を満たす定数, $\Omega_r = \Omega \cap B_r$ とする. さらに, $r > r_0$ に対して次を定義する：

$$\begin{aligned} L_r^2(\Omega) &= \left\{f \in L^2(\Omega)^n \,|\, \mathrm{supp}\, f \subset \Omega_r\right\}, \\ \mathscr{H}_r(\Omega) &= \left\{\mathbb{U} = {}^T(u, v) \in \mathscr{H}(\Omega) \,|\, u, v \in L_r^2(\Omega)\right\}. \end{aligned}$$

このとき, 次の定理を得た.

定理 1.1. *$\mathbb{A}$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ 上 C^0 半群 $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ を生成する.*

定理 1.2. *$n \ge 2$, m を非負整数, r を $r > r_0$ を満たす任意の数とする. このとき, 任意の $\mathbb{F} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して次が成り立つ:*

$$\|\partial_t^m T(t)\mathbb{F}\|_{\mathscr{H}(\Omega_r)} \le C_{m,n,r}(1 + t)^{-\frac{n}{2} - m}\|\mathbb{F}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}, \quad t \ge 0.$$

ただし, $C_{m,n,r}$ は m, n, r に依存する定数である.

注意 1.3. 有界領域 Ω_r の場合, (1) で定義したノルムは, Poincaré の不等式から

$$\|\mathbb{U}\|_{\mathscr{H}(\Omega_r)} = \left(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \tau\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

と同値になる.

2　準備

次のレゾルベント問題について考える:

$$\lambda u + Au = f \quad \text{in}\,\Omega. \tag{2}$$

ここで, $\lambda \in \Sigma_{\ell,\epsilon} = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \,|\, |\lambda| < \ell, |\arg\lambda| < \pi - \epsilon\}$, $0 < \ell < 1$, $0 < \epsilon < \pi/2$ であり, A は Stokes 作用素である. また, (2) の解を $S(\lambda)f$ で定義し, $W_s^{m,2}(\Omega)$ を次で定義される重み付き Sobolev 空間とする:

$$W_s^{m,2}(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \partial_j^k f \in L^2(\Omega),\, k \le m \right\}$$

ただし, m は非負整数, s は実数とする. さらに, $s > n/2$ and $s' < -n/2$ に対して

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(L^2_\sigma(\Omega) \cap W_s^{0,2}(\Omega)^n, L^2_\sigma(\Omega_r) \cap W_{s'}^{2,2}(\Omega)^n\right)$$

とおく. このとき, 次が知られている:

命題 2.1 ([5]). *$\ell > 0$ 及び $S(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\Sigma_{\ell,\epsilon}, \mathcal{B}\right)$ が存在し, $S(\lambda)$ は次の展開式をもつ:*

$$S(\lambda) = \begin{cases} G_1 \lambda^{\frac{n}{2}-1} \log\lambda + G_2(\lambda) + G_3(\lambda)\lambda^{\frac{n}{2}-1} & \textit{where } n \textit{ is even}, \\ G_1 \lambda^{\frac{n}{2}-1} + G_2(\lambda) + G_3(\lambda)\lambda^{\frac{n}{2}-1} & \textit{where } n \textit{ is odd}, \end{cases}$$

ここで, $G_1 \in \mathcal{B}$, $G_2(\lambda)$ は λ に関する $[n/2]-1$ 次多項式, $G_3(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to 0)$ である.

次節において, λ が原点付近の場合について, $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ の性質を調べる. そのために, 以下で定義される関数空間 $\mathcal{C}^k$ とその性質を用いる.

定義 2.2 ([2]). *X を Banach 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $N \ge 0$ を整数とし, $k = N + \sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ とする. さらに*

$$\mathcal{C}^k(\mathbf{R}; X) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}; X) \,|\, \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} < \infty \right\}$$

とする. ただし,

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} = \sum_{j=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^j f(\tau) \right|_X d\tau + \sup_{h \ne 0} |h|^{-\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_h \left(\frac{d}{d\tau}\right)^N f(\tau) \right|_X d\tau$$

であり, $\Delta_h f(\tau) = f(\tau + h) - f(\tau)$ とした.

命題 2.3 ([9]). *N を非負整数, X を Banach 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $f \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}; X)$, $f(\tau) = 0$ if $|\tau| \ge 2$ を仮定し, $I = (-2, 2)$ とおく. さらに, $k = N + \sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ とし, $f(\tau)$ $(\tau \in I \setminus \{0\})$ が次の条件を満たすとする:*

$$\left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^j f(\tau) \right|_X \le C_f \quad \textit{for any integer } j \in [0, N-1],$$
$$\left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^N f(\tau) \right|_X \le C_f |\tau|^{\sigma-1}, \quad \left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{N+1} f(\tau) \right|_X \le C_f |\tau|^{\sigma-2}.$$

このとき, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}; X)$ であり, 次が成り立つ:

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} \le C_{\sigma,N} C_f.$$

命題 2.4 ([9])**.** X を $Banach$ 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $N \geq 0$ を整数, $0 < \sigma < 1$ とし, $f \in \mathcal{C}^{N+\sigma}(\mathbf{R}; X)$ とする. さらに

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\tau t}d\tau.$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$|F(t)|_X \leq C(1+|t|)^{-(N+\sigma)}\langle\!\langle f\rangle\!\rangle_{N+\sigma,X}.$$

3 証明の概要

3.1 C^0 半群の構成

Lumer–Phillips の定理 [6, Chapter 1, Theorem 4.3] から, 次の命題を示せば, $\mathbb{A}$ が $\mathscr{H}(\Omega)$ 上 C^0 半群を生成することがわかる. なお, 証明は省略する.

命題 3.1. (1) $\mathbb{A}$ は消散作用素である. すなわち, $\mathrm{Re}\,(\mathbb{AU}, \mathbb{U})_{\mathscr{H}(\Omega)} \leq 0$.

(2) $\mathscr{R}(\mathbb{I}-\mathbb{A}) = \mathscr{H}(\Omega)$. ここで, $\mathscr{R}(\mathbb{I}-\mathbb{A})$ は $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ の値域を表す.

(3) $\mathscr{D}(\mathbb{A})$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ で稠密である.

ここで, 次の補題を用意しておく.

補題 3.2. $b(a)$ を

$$b(a) = \frac{a}{2a\sqrt{\tau} + 2(3a\tau+1)\sqrt{\tau+1}}.$$

で定める. このとき, 任意の $a > 0$ に対して $M_a > 0$ が存在して, 次を満たす:

$$\left\|(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))} \leq M_a$$

ただし, $\lambda \in D_{a,b(a)} = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, |\mathrm{Re}\,\lambda| \leq b(a), |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq a\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \geq b(a)\}$ である.

3.2 $\lambda = 0$ 付近での $(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$ の解析

ここでは, $\lambda = 0$ 付近での $(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$ を調べる. 以下, $(\cdot,\cdot)_D$ は $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ を表し, $\ell > 0$ は命題 2.1. と同じものとする. さらに, $\varphi_r(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n; [0,1])$ は $\varphi_r(x) = 1$ if $|x| \leq r$, $\varphi_r(x) = 0$ if $|x| \geq r+1$ を満たすものとし, $\rho_d(s) \in C_0^\infty(\mathbf{R}; [0,1])$ は $\rho_d(s) = 1$ if $|s| < d/2$, $\rho_d(s) = 0$ if $|s| > d$ を満たすものとする.

補題 3.3. $Q_d = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < d, |\mathrm{Im}\,\lambda| < d\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 次を満たす $d > 0$ 及び $\mathbb{R}(\lambda) \in \mathrm{Hol}\,(Q_d, \mathcal{L}(\mathscr{H}_r(\Omega), \mathcal{H}(\Omega_r)))$ が存在する:

$$\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} = (\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega) \quad \text{and} \quad \lambda \in Q_d.$$

ただし,

$$\mathcal{H}(\Omega_r) = \left\{{}^T(f,g) \,|\, f \in H^1(\Omega_r) \cap L^2_\sigma(\Omega),\, g \in L^2(\Omega_r) \cap L^2_\sigma(\Omega)\right\}.$$

(2) 任意の非負整数 m, $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$, $\mathbb{Y} \in \mathscr{H}(\Omega)$, 及び $\alpha < d$ に対して, 次を満たす定数 $C = C_{m,n,r,\rho_d,\varphi_r}$ が存在する:

$$\left\langle\!\!\left\langle \rho_d(\cdot) s^m (\varphi_r \mathbb{R}(\alpha + i\cdot)\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\rangle\!\!\right\rangle_{\frac{n}{2}+m,\mathbf{R}} \leq C\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.$$

補題 3.3-(2) を示すために, 次の補題を用いる.

補題 3.4. $\widetilde{\ell} = 2\ell/3$ とする. 任意の $f \in L^2_\sigma(\Omega) \cap L^2_r(\Omega)$, $g \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, $h \in L^2_\sigma(\Omega)$, 及び $0 < \alpha < \widetilde{\ell}$ に対して次が成り立つ:

$$\left\langle\!\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot)\,(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, g)_D \right\rangle\!\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \leq C_{n,\varphi_r,\rho_{\widetilde{\ell}}}\|f\|\|\nabla g\|,$$
$$\left\langle\!\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot)\,(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, h) \right\rangle\!\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \leq C_{n,\varphi_r,\rho_{\widetilde{\ell}}}\|f\|\|h\|.$$

証明. n が奇数の場合についてのみ示す. 命題 2.1 から, 以下の評価が成り立つ.

$$\left|\left(\frac{d}{ds}\right)^j \left\{\rho_{\widetilde{\ell}}(s)\,(\varphi_r S(\alpha + is) f, g)_D\right\}\right| \leq C\|f\|\|\nabla g\| \quad \text{for any integer } j \in \left[0, \frac{n-3}{2}\right],$$
$$\left|\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\rho_{\widetilde{\ell}}(s)\,(\varphi_r S(\alpha + is) f, g)_D\right\}\right| \leq C\|f\|\|\nabla g\||s|^{-\frac{1}{2}},$$
$$\left|\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left\{\rho_{\widetilde{\ell}}(s)\,(\varphi_r S(\alpha + is) f, g)_D\right\}\right| \leq C\|f\|\|\nabla g\||s|^{-\frac{3}{2}}.$$

ただし, $C = C_{n,\rho_{\widetilde{\ell}},\varphi_r}$. したがって, 命題 2.3 から, n が奇数の場合について,

$$\left\langle\!\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot)\,(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, g)_D \right\rangle\!\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \leq C\|f\|\|\nabla g\|.$$

第 2 式も同様である. □

補題 3.3 の証明. (1) $S(\lambda)$ を用いて, $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ を表現する. $\mathbb{X} = {}^T(f, g)$ 及び

$$(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{U} = \mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{U} \in \mathscr{D}(\mathbb{A})$$

とする. このとき

$$v = \lambda u - f \quad \text{and} \quad \{\lambda(\tau\lambda + 1) + A\}u = (\tau\lambda + 1)f + \tau g$$

である. $\ell' < \ell$ を十分小にとり, $\lambda \in \Sigma_{\ell',\epsilon'}$ のとき, $\lambda(\tau\lambda + 1) \in \Sigma_{\ell,\epsilon}$ となるような $\epsilon' < \pi/2$ が存在するようにとる. ここで

$$\mathbb{R}(\lambda) = \begin{bmatrix} (\tau\lambda + 1)S(\lambda(\tau\lambda + 1)) & \tau S(\lambda(\tau\lambda + 1)) \\ \lambda(\tau\lambda + 1)S(\lambda(\tau\lambda + 1)) - 1 & \tau\lambda S(\lambda(\tau\lambda + 1)) \end{bmatrix} \tag{3}$$

とおけば, $\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} \in \mathscr{D}(\mathbb{A})$ がわかり,

$$\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} = (\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega) \quad \text{and} \quad \lambda \in \Sigma_{\ell',\epsilon'}$$

となる. したがって, $d = 2\ell'/3$ として $\mathbb{R}(\lambda)$ は (1) の性質をもつ .

(2) $\lambda = \alpha + is$ 及び $\mathbb{Y} = {}^T(y,z)$ とする. 補題 3.4, (3), 及び Poincaré の不等式から,

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m(\varphi_r\mathbb{R}(\alpha+i\cdot)\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)}\rangle\!\rangle &\le \langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r(\tau\lambda+1)S(\lambda(\tau\lambda+1))f,y\right)_D\rangle\!\rangle \\ &\quad + \tau\langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r S(\lambda(\tau\lambda+1))g,y\right)_D\rangle\!\rangle \\ &\quad + \tau\langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r\lambda(\tau\lambda+1)S(\lambda(\tau\lambda+1))f,z\right)\rangle\!\rangle \\ &\quad + \tau\langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r f,z\right)\rangle\!\rangle \\ &\quad + \tau^2\langle\!\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r\lambda S(\lambda(\tau\lambda+1))g,z\right)\rangle\!\rangle \\ &\le C\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.\end{aligned}$$

ただし, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{n/2,\mathbf{R}}$ とした. □

3.3 局所エネルギー減衰評価

本節では, 定理 1.2 を示す. まず, 定理 1.1 及び命題 3.1 から次が成り立つ:

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))} \le 1, \quad \forall t \ge 0. \tag{4}$$

このとき, Huang [4, Lemma 1] ([2, Lemma 4.2] も参照) から, 次が知られている.

補題 3.5. $\alpha > 0$ 及び $\mathbb{X} \in \mathscr{H}(\Omega)$ とする. また,

$$g(\omega) = \left\|((\alpha+i\omega)\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}\right\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.$$

とする. このとき, $g(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$ であり, 次が成り立つ:

$$\lim_{|\omega|\to\infty} g(\omega) = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)^2 d\omega \le \frac{\pi}{\alpha}\|\mathbb{X}\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)}.$$

定理 1.2 を証明するためには, 次を示せばよい.

命題 3.6. φ_r を補題 3.3 と同じとし, m を非負整数とする. このとき, 任意の $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して

$$\|\varphi_r\partial_t^m T(t)\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}-m}\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}, \quad t \ge 0 \tag{5}$$

が成り立つ. ここで, $C = C_{M_a,m,n,\varphi_r,}$ であり, M_a は補題 3.2 に現れる定数である.

証明. (4) が成り立つので, $\mathbb{X} \in \mathscr{D}(\mathbb{A}^2)$ に対して次の表現を得る:

$$T(t)\mathbb{X} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} e^{\lambda t}(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}d\lambda, \quad \alpha > 0 \tag{6}$$

(cf [6, Chapter 1, Corollary 7.5]). $\mathscr{D}(\mathbb{A}^2)$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ で稠密ゆえ, (6) は $\mathscr{H}(\Omega)$ 上の表現として成り立つ. 以後, 簡単のため $\rho(s) = \rho_d(s)$ とする. $\alpha < d$, $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$, 及び $\mathbb{Y} \in \mathscr{H}(\Omega)$ とする. このとき,

$$(\varphi_r T(t)\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)} = J_0(t) + J_\infty(t)$$

である. ただし,

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \rho(s) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds,$$
$$J_\infty(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \lim_{\omega \to \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds.$$

補題 3.3 と命題 2.4 から

$$|\partial_t^m J_0(t)| \le C e^{\alpha t} (1 + t)^{-\frac{n}{2} - m} \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \tag{7}$$

ここで,

$$J_\infty(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \lim_{\omega \to \infty} L_\omega(t)$$

とする. ただし,

$$L_\omega(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds$$

とした. 関係式 $(it)^{-1} de^{ist}/ds = e^{ist}$ と部分積分から

$$L_\omega(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(-1)^{k-1}}{(it)^k} L_\omega^k(t) + \frac{(-1)^\ell}{(it)^\ell} M_\omega^\ell(t)$$

を得る. ただし,

$$L_\omega^k(t) = \left[e^{ist} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left\{ (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\} \right]_{s=-\omega}^{s=\omega},$$
$$M_\omega^\ell(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} \frac{d^\ell}{ds^\ell} \left\{ (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\} ds.$$

である. 補題 3.2 から

$$\left\| \frac{d^j}{ds^j} ((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))} \le j! M_a^j \left\| ((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))}, \quad |s| \ge a$$

が従うので, 補題 3.5 から

$$\left| L_\omega^k(t) \right| \to 0, \quad \omega \to \infty \tag{8}$$

を得る. Leibniz の公式と $\mathbb{A}$ の共役作用素 $\mathbb{A}^*$ を用いて,

$$\begin{aligned} \left| M_\omega^\ell(t) \right| &\le \ell! \int_{\frac{d}{2} \le |s| \le \omega} (1 - \rho(s)) \left| \left(((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-\ell}\mathbb{X}, ((\alpha - is)\mathbb{I} - \mathbb{A}^*)^{-1} \varphi_r \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right| ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{k} k! \int_{\frac{d}{2} \le |s| \le d} \left| \frac{d^{\ell-k}}{ds^{\ell-k}} \rho(s) \right| \left| \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-k-1}\mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right| ds \\ &= K_1 + K_2. \end{aligned}$$

$a < d/2$ とすれば, 補題 3.2 と補題 3.5 から

$$
\begin{aligned}
K_1 &\leq C\ell! M_a^{\ell-1} \left(\int_{\frac{d}{2}\leq|s|} \left\| ((\alpha+is)\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \right\|_{\mathscr{H}(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_{\frac{d}{2}\leq|s|} \left\| ((\alpha-is)\mathbb{I}-\mathbb{A}^*)^{-1}\varphi_r\mathbb{Y} \right\|_{\mathscr{H}(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{\ell,M_a}\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

さらに, 補題 3.2 から

$$
K_2 \leq C_{\ell,M_a}\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \qquad (10)
$$

したがって, (8), (9), 及び (10) を合わせれば, 任意の自然数 ℓ に対して

$$
|J_\infty(t)| \leq \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} t^{-\ell} C_{\ell,M_a}\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \qquad (11)
$$

を得る. (7) と (11) で $\alpha \to 0$ とすれば, 任意の $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して (5) を得る. □

参考文献

[1] W. Dan, Y. Shibata, On the L_q-L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, *J. Math. Soc. Japan*, **51**, (1999), 181–207.

[2] W. Dan, Y. Shibata, On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation, Funkcial. Ekvac. 38 (1995) 545–568.

[3] W. Dan, T. Kobayashi, Y. Shibata, On the local energy decay approach to some fluid flow in an exterior domain, Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid, 1–51, *Lecture Notes Numer. Appl. Anal*, **16**, Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[4] F. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Differential. Equations. 1 (1985) 43–56.

[5] H. Iwashita, L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q, *Math. Ann*, **285**, (1989), 265–288.

[6] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I: Local well-posedness, *Evol. Equ. Control Theory*, **1**, (2012), 195–215.

[8] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations II: Global existence of small solutions, *Evol. Equ. Control Theory*, **1**, (2012), 217–234.

[9] Y. Shibata, On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain, Tsukuba J. Math. 7 (1983) 1–68.