超幾何微分方程式の Voros 係数の位相的漸化式による表示

竹井 優美子 (Yumiko Takei)*

概 要

本講演では Weber 方程式をはじめとする (合流型) 超幾何微分方程式に対して, 完全 WKB 解析で重要な役割を演じる Voros 係数が, 位相的漸化式により定義される自由エネルギーの母関数を用いて書き表されることを示す. なお, 本研究は名古屋大学の岩木耕平氏及び神戸大学の小池達也氏との共同研究に基づく.

1 準備

1.1 WKB 解と Voros 係数

1 次元 Shrödinger 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x,\hbar)\right)\psi(x,\hbar) = 0 \tag{1.1}$$

($\hbar$ は Planck 定数と呼ばれる小さなパラメータ) は WKB 解と呼ばれる形式解

$$\psi_\pm(x,\hbar) = \exp\left(\int^x S^{(\pm)}(x,\hbar)\,dx\right) \tag{1.2}$$

を持つ. このとき方程式 (1.1) の Voros 係数は, $S^{(+)}$ を方程式 (1.1) の特異点 b_0 から特異点 b_1 までの積分を正規化したものとして定義される. 本講演で考える $Q(x,\hbar)$ の場合は次式で与えられる.

$$V := \int_{b_0}^{b_1} (S^{(+)}(x,\hbar) - \hbar^{-1}S_{-1}^{(+)}(x) - S_0^{(+)}(x))\,dx. \tag{1.3}$$

* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程後期課程

1.2　位相的漸化式

本講演では, 代数曲線

$$P(x,y)=p_0(x)y^2+p_2(x)=0 \tag{1.4}$$

を考える．また, $x(z)$ と $y(z)$ は $P(x(z),y(z))=0$ であって, dx と dy が共通零点を持たないような $\mathbb{P}^1$ 上の有理型函数とする．このとき, 位相的漸化式は次のように定式化される．

定義 1.1 ([EO, Definition 4.2])**.** $\mathbb{P}^1$ 上の有理型多重微分 $W_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)$ $(g\geq 0,$ $n\geq 1)$ を以下で定める．

$$\begin{aligned}
W_{0,1}(z_1) &= y(z_1)dx(z_1), && (1.5)\\
W_{0,2}(z_1,z_2) &= \frac{dz_1dz_2}{(z_1-z_2)^2}, && (1.6)\\
W_{g,n+1}(z_0,z_1,\ldots,z_n) &= \sum_{r\in R}\operatorname*{Res}_{z\to r}K(z_0,z)\Bigg[W_{g-1,n+1}(z,\bar{z},z_1,\ldots,z_n) && (1.7)\\
&\quad+\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{1,\ldots,n\}}}{}^{'}\, W_{g_1,1+|I|}(z,z_I)\,W_{g_2,1+|J|}(\bar{z},z_J)\Bigg].
\end{aligned}$$

ここで, $R=\{r\in\mathbb{P}^1 \mid dx(r)=0\}$ は $x:\mathcal{C}\to\mathbb{P}^1$ を被覆写像とみなした際の分岐点の集合, $\bar{z}$ は各分岐点における z の局所共役点 (つまり, 各分岐点のある近傍で $x(z)=x(\bar{z})$ かつ $y(z)\neq y(\bar{z})$ を満たす点),

$$K(z_0,z)=\frac{\frac{1}{z_0-z}dz_0}{(y(z)-y(\bar{z}))\,dx(z)} \tag{1.8}$$

であり, また (1.7) の最後の和は $\{1,\ldots,n\}$ の空集合も許す任意の分割に関する和であり, $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,n\}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_m)$ とすると

$$W_{g,m+1}(z,z_I)=W_{g,m+1}(z,z_{i_1},\ldots,z_{i_m})$$

である. また, 同じ和における $'$ は $(g_1,I)=(0,\emptyset)$ および $(g_2,J)=(0,\emptyset)$ なる場合を除外することを意味する.

2　量子曲線

この位相的漸化式により定義される $W_{g,n}$ を用いて, V.Bouchard と B.Eynard は, 適当な条件のもとで方程式 (1.1) の WKB 解が構成できることを示した ([BE])．特に, Weber 方程式の場合には次が得られる．

定理 2.1 ([BE], cf. [Ta]). (1.1) において

$$Q(x,\hbar)=\frac{x^2}{4}-E-(\nu-\frac{1}{2})\hbar \tag{2.1}$$

とする．ただし $\nu\in\mathbb{C}$ はパラメータである．このとき,

$$\begin{aligned}\psi(x,\hbar)=&\exp\Biggl[\hbar^{-1}\int^{z}W_{0,1}(z)+\frac{1}{2!}\int_D\int_D\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1z_2-1)^2}\,dz\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\hbar^m\Biggl\{\sum_{\substack{2g+n-2=m\\g\geq 0,\,n\geq 1}}\frac{1}{n!}\int_D\cdots\int_D W_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)\Biggr\}\Biggr]\Biggr|_{z=z(x)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

は (1.1) の WKB 解となる．ここで $\int_D=\nu\int_0^z+(1-\nu)\int_\infty^z$ であり, $z=z(x)$ は $x=x(z)$ の逆関数である．

3　主結果

本講演の主結果は, (合流型) 超幾何微分方程式の Voros 係数が自由エネルギー F_g の母関数を用いて表されるというものである．以下, Weber 方程式の場合に説明することとし, $Q(x,\hbar)$ は (2.1) で与えられるものとする．このとき, F_g は方程式 (1.1) に含まれるパラメータ E に依存するので, それを $F_g(E)$ とかき, さらに $F_g(E)$ の母関数を

$$F(E,\hbar)=\sum_{g\geq 0}F_g(E)\hbar^{2g-2}$$

とする．また, このとき方程式 (1.1) の Voros 係数はパラメータ E, ν, $\hbar$ に依存するので, それを $V(E,\nu,\hbar)$ と表す．

定理 3.1 (cf. [Ta]). 次が成り立つ．

$$V(E,\nu,\hbar)=\{F\left(E+\nu\hbar,\hbar\right)-F\left(E+(\nu-1)\hbar,\hbar\right)\}-\frac{\partial F_0}{\partial E}\hbar^{-1}-\frac{2\nu-1}{2}\frac{\partial^2F_0}{\partial E^2}. \tag{3.1}$$

この定理 3.1 と WKB 解の性質により, F が差分方程式

$$F(E+\hbar,\hbar)-2F(E,\hbar)+F(E-\hbar,\hbar)=\frac{\partial^2F_0}{\partial E^2} \tag{3.2}$$

を満たすことがわかる．これを解くと $F_g(E)$ の具体形が得られる．

補題 3.2.

$$F_g(E)=\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}E^{2-2g}\quad(g\geqq 2). \tag{3.3}$$

注意 3.3. Weber 方程式の場合の $F_g(E)$ の具体形は, [HZ] により知られている.

定理 3.1 と補題 3.2 から, $V(E,\nu,\hbar)$ の具体形もわかる.

定理 3.4 (cf. [AKT], [T]). $V(E,\nu,\hbar)$ について, 次が成り立つ.

$$V(E,\nu,\hbar)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n(1-\nu)}{n(n-1)}E^{1-n}\hbar^{n-1}. \tag{3.4}$$

ここで $B_n(X)$ は

$$\frac{we^{Xw}}{e^w-1}=\sum_{n\geq 0}B_n(X)\frac{w^n}{n!}$$

で定義される n 番目の Bernoulli 多項式である.

注意 3.5. 関係式 (3.4) で $\nu=1/2$ の場合は, Sato's conjecture (cf. [AKT], [T]) として知られているものである.

さらに, これらの定理の一般化として, Gauss の超幾何方程式等の場合にも同様の結果が得られる. 詳しくは講演の中で触れる予定である.

参考文献

[AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei : The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.

[BE] V. Bouchard and B.Eynard : Reconstructing WKB from topological recursion, arXiv:1606.04498v1 [math-ph].

[EO] B. Eynard and N. Orantin : Invariants of algebraic curves and topological expansion, Comm. in Number Theory and Phys., **1** (2007), 347–452.

[HZ] J. Harer and D. Zagier : The Euler characteristic of the moduli space of curves, Invent. Math., **85** (1986), 457–485.

[T] Y. Takei : Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B10** (2008), 205–224.

[Ta] 竹井優美子 : 完全 WKB 解析と位相的漸化式について, 神戸大学修士論文, 2017.