# $p$-Sobolev flowの解について

中村 謙太 (Kenta Nakamura) * †

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqq 3)$ を有界領域，境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし，$T > 0$ を任意に固定した正数とする．本講演では，$p$-Sobolev flow とよばれる，次の二重非線形放物型初期・境界値問題について考える:

$$\begin{cases} \partial_t(|u|^{q-1}u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

ただし，$2 \leqq p < N$, $q := \frac{Np}{N-p} - 1$ とし，$u = (u^i(x,t))$, $i = 1, \dots, k$, は $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ に対して定義された $\mathbb{R}^k$ に値を持つ未知関数である．特に $p = 2, k = 1$ の場合 (1) は Yamabe flow (山辺流) とよばれる．Yamabe flow はいわゆる山辺の問題 ($N(\geqq 3)$ 次元 Riemann 多様体 $(M, g_0)$ 上の定スカラー曲率の共形計量の存在) の研究で導入されたもので，熱流

$$u_t = (s-R)u = u^{-\frac{4}{N-2}}(c_N\Delta_{g_0}u - R_0u) + su, \quad c_N := \frac{4(N-1)}{N-2} \tag{2}$$

のことである．ただし，$u = u(t)$ $(t \geqq 0)$ は $g(t) = u^{\frac{2}{N-2}}g_0$, $\int_M u^{\frac{2N}{N-2}}dvol_{g_0} = 1$ をみたす $M$ 上の $C^\infty$ 正値関数であり，$R$ は計量 $g$ に関するスカラー曲率で $s := \int_M R dvol_g$ である．Hamilton ([1]) はある幾何学的な条件の下 (2) の収束について示し，Ye ([2]) は多様体 $(M, g_0)$ が正曲率かつ局所共形平坦の下 (2) の時間大域解の存在と定常解の性質について示した．さらに，Schwetlick-Struwe ([3]) は次元について $3 \leqq N \leqq 5$, および積分値 $\inf_u \int_M \left(c_N|\nabla u|_{g_0}^2 + R_{g_0}u^2\right) dvol_{g_0}$ の適切な条件と $(M, g_0)$ が正曲率の下 (2) の時間大域解の存在と $t \to \infty$ での解の漸近収束を示した．

一方，多様体を Euclid 空間内の有界領域にすると，上記の結果の曲率の条件は成り立たなくなる．本研究では曲率の条件を外して，Yamabe flow (2) より一般に (1) の $p$-Sobolev flow の解について以下の結果を得た．

**主結果 1**

$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．このとき任意の $T > 0$ に対して，(1) の弱解が存在する．

*九州大学大学院数理学府博士後期課程 2 年 k-nakamura@math.kyushu-u.ac.jp
†この研究は三沢 正史 先生 (熊本大学先端科学学部) との共同研究に基づく．

主結果1の証明のアイデアは，$(*)$ で時間微分項 $\partial_t\left(|u|^{q-1}u\right)$ を後ろ向き差分商

$$\partial_t^{-h}\left(|u|^{q-1}u\right) := \frac{|u|^{q-1}u(t,x)-|u|^{q-1}u(t-h,x)}{h} \quad (x\in\Omega)$$

に置き換えて，**楕円型方程式に帰着させ**，**Galerkin 法で解く**というものである．すなわち，

①：$N\in\mathbb{N}$，$h:=T/N>0$ とし，時間を止める．$\{e_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ を $L^2(\Omega)$ で正規直交系をなし，$W_0^{1,p}(\Omega)$ で稠密とする．また，$V_l:=\mathrm{span}\{e_1(x),\dots,e_l(x)\}$ とおく．$u_0$, $u_{m-1}$ が与えられたとき，$\forall\xi\in V_l$ に対して，

$$-\int_\Omega |\nabla u_{m,l}|^{p-2}\nabla u_{m,l}\cdot\nabla\xi\,dx = \int_\Omega \frac{|u_{m,l}|^{q-1}u_{m,l}-|u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}}{h}\,\xi\,dx$$

をみたす $u_{m,l}(x):=\sum_{j=1}^{l}\alpha_{mhj}e_j(x)$ を帰納的に定義し ($\{u_{m,l}\}$ の存在性は Brower の不動点定理より保証 ([8]))，$l\to\infty$ の極限に移行し $\{u_m(x)\}$ を構成 ([6])．なお，この極限移行に関しては，**Minty's Monotone trick** を用いる．実際，$E(\nabla u):=|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ と定義するとき，代数不等式

$$(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)\geq C|\xi-\eta|^p,\quad \forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^k$$

を用いると，$E(\nabla u)$ は monotone であることが分かる．

②：各時間区間 $(m-1)h<t\leqq mh$ で①で得られた $\{u_m(x)\}$ をステップに拡張：$\{\bar{u}_h(x,t)\}$.

③：$\{\bar{u}_h\}$ の $L^p(0,T\,;W_0^{1,p}(\Omega))$ における弱収束極限を $u$ として弱解を構成.

なお，③のステップでは次のエネルギー評価を用いる．

**命題 1 (エネルギー評価)**

$\bar{u}_h$ に対して，次の (i)-(iii) が成り立つ．

(i) $$\frac{q}{q+1}\sup_{0\leqq t\leqq T}\int_\Omega |\bar{u}_h(t)|^{q+1}\,dx+\int_0^T\!\!\int_\Omega |\nabla\bar{u}_h|^p\,dxdt \leqq \frac{q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx$$

(ii) $$\int_0^T\!\!\int_\Omega\left(\int_0^1 |s\bar{u}_h(t,x)+(1-s)\bar{u}_h(t-h,x)|^{q-1}\,ds\right)|\partial_t^{-h}\bar{u}_h|^2\,dtdx + \frac{1}{p}\sup_{0\leqq t\leqq T}\int_\Omega |\nabla\bar{u}_h(t)|^p\,dx \leqq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx$$

(iii) $\|\bar{u}_h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqq\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\quad(\forall t\in[0,T])$
($\rightsquigarrow$ [4] における cut-off 関数のアイデアによる)

**主結果 2 (解の有界性)**

$k=1,\ u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ かつ $\Omega$ 上 $u_0 \geqq 0,\ u \not\equiv 0$ とする．このとき，任意の $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$ に対して

$$\inf_\Omega u_0 \leqq u(x,t) \leqq \sup_\Omega u_0$$

以下，$u\geqq 0$ を (1) の非負弱優解とする．また，$K_{2\rho}$ を $\mathbb{R}^N$ 内の原点 $0\in\mathbb{R}^N$ を中心とする一辺 $2\rho$ の立方体とし，$\theta>0$ をパラメーターとして，シリンダーを

$$Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho) := K_{2\rho}\times(-\theta(2\rho)^p,\,0)$$

とおく．ここで $(y,s)\in\Omega_T := \Omega\times(0,T)$ に対し，

$$(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho) := K_{2\rho}(y)\times(s-\theta(2\rho)^p,\,s)\subset\Omega_T$$

となるように十分小さく $\rho>0$ をとる．さらに，

$$\mu_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u,\quad \mu_- := \operatorname*{ess\,inf}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u,\quad \omega := \operatorname*{ess\,osc}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u = \mu_+ - \mu_-$$

とするとき次が成り立つ．

**命題 2**

$\xi\in(0,1],\ a\in(0,1)$ を任意に固定する．このとき，$p, N$ とパラメーター $\{\theta,\xi,a,\omega\}$ に依存する正数 $\nu_->0$ が存在して，

$$\Big|\Big\{(x,t)\in(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)\ :\ u(x,t)<\mu_-+a\omega\Big\}\Big| \leqq \nu_-\big|Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)\big|$$

ならば，

$$u(x,t)\geqq \mu_-+a\xi\omega \quad \text{a.e.}\quad (x,t)\in(y,s)+Q(\theta\rho^p,\,\rho)$$

が成り立つ．ただし，集合 $X$ に対して $|X|$ は $X$ の Lebesgue 測度を表す．

**主結果 3 (解の正値性の伝播)**

ある $(y,s)\in\Omega_T$ と $\rho>0$ に対して，

$$\big|\big\{u(\cdot,s)\geqq L\big\}\cap K_\rho(y)\big| \geqq \alpha\big|K_\rho(y)\big|$$

がある $L>0$ とある $\alpha\in(0,1)$ について成り立つならば，$p, N, \alpha$ に依存する $\delta,\ \varepsilon\in(0,1)$ が存在して，

$$\big|\big\{u(\cdot,t)>\varepsilon L\big\}\cap K_\rho(y)\big| \geqq \frac{1}{2}\alpha\big|K_\rho(y)\big|,\quad \forall t\in\big(s,\ s+\delta L^{q+1-p}\rho^p\big).$$

さらに，ある正数 $\eta=\eta(p,N,\alpha)<1$ が存在して，次が成り立つ:

$$u(x,t)\geqq \eta L \quad \text{a.e.}\quad (x,t)\in K_{2\rho}(y)\times\left(s+\frac{1}{2}\delta L^{q+1-p}\rho^p,\ s+\delta L^{q+1-p}\rho^p\right).$$

証明は，DiBenedetto ([7]) らによる $p$ - Laplace 方程式 および porous medium 方程式に対する DeGiorgi の方法にならい，時空のスケールサイズをうまく定めて局所エネルギー評価を行う.

# 参考文献


[1] R.S. Hamilton, *Lectures on geometric flows*, (1989) (unpublished)

[2] R. Ye, *Global existence and convergence of Yamabe flow*, J.Diff, Geom, **39** (1994), 35–50.

[3] H. Schwetlick & M. Struwe, *Convergence of the Yamabe flow for large energies*, J. Reine Angew, Math, **562** (2003), 59–100.

[4] H.W. Alt & S. Luckhaus, *Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations*, Math. Z. **183** (1983), 311–341.

[5] J.W. Barrett & W.B. Liu, *Finite element of approximation of the parabolic p-Laplacian*, Slam J. Numer. Anal, Vol. **34** (1994), no.2, 413–428.

[6] Y. Chen, M.C. Hong & N. Hungerbühler, *Heat flow of p-harmonic maps with values into spheres*, Math. Z. **215** (1994), 25–35.

[7] E. DeBenedetto, U. Gianazza & V. Vespri, *Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2012.

[8] L.C. Evans, *Partial Differential Equations second edition*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol.**19**, 2010.