Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数

関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
玉岡　優一 (TAMAOKA Yuichi)

1　はじめに

退化したパラメーターに対する Jack 多項式を Lauricella の超幾何級数を用いて具体的に表した．

関口 [9] は対称空間 $SL(3,\mathbf{R})/SO(3)$ 上の退化したパラメーターに対する球関数の満たす微分方程式系と Appell の超幾何級数 F_1 の満たす微分方程式系を関係づけることにより，退化したパラメーターに対する球関数が Appell の F_1 を用いて表されることを示した．

Jack 多項式はパラメーター $k > 0$ をもつ多変数の直交多項式で $k = 1$ のとき Schur 多項式，$k = 1/2$ のとき zonal 多項式（対称空間 $SU(n)/SO(n)$ 上の帯球関数）になる．

本講演では，退化したパラメーターに対する n 変数の Jack 多項式が Lauricella の F_D を用いて表されることを述べる．これは $n = 3,\ k = 1/2$ の場合は関口 [9] の結果から従うが，そこでの手法を一般の n, k に拡張することにより示される．

2　Jack 多項式

この節では，[3], [7], [10] に従って Jack 多項式について述べる．

$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ $(n \geq 2)$ を満たす 0 以上の整数の組 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を分割という．分割を $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とおき，$|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ とする．変数を $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ とする．多項式環 $\mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]$ には，変数の入れ替えにより対称群 S_n が作用する．対称群の作用により不変な元全体の集合を

$$\mathbf{R}[x]^{S_n} = \mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n}$$

と表す．$\mathbf{R}[x]^{S_n}$ の元を n 変数対称多項式という．

$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，$x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ とする．また，分割 λ に対して，λ_i が 0 でない i の総数を長さという．長さ n 以下の分割 λ に対するモノミアル対称多項式 $m_\lambda(x)$ を

$$m_\lambda(x) = \sum_{\gamma \in S_n \lambda} x^\gamma$$

で定義する．例えば

$$m_{(2,0)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

$$m_{(1,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$m_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2)$$

である．$m_\lambda(x)$ は $|\lambda|$ 次斉次多項式である．

$k>0$ とする．$\vartheta_i = x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ とおく．2 階の微分作用素 $L(k)$ を

$$L(k) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2 + k \sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i+x_j}{x_i-x_j} (\vartheta_i - \vartheta_j)$$

で定義する．μ, λ を分割とし，半順序 $\mu \le \lambda$ を

$$|\mu| = |\lambda| \text{ かつ, 全ての } i \ge 1 \text{ に対して } \mu_1 + \cdots + \mu_i \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

により定義する．

定理 1 (Macdonald [7], [10])
次の条件 (i)，(ii) を満たす n 変数の対称多項式 $P_\lambda^{(1/k)}(x)$ がただ一つ存在する．
(i) $P_\lambda^{(1/k)}(x) = \sum_{\mu\le\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x) \quad (u_{\lambda\mu} \in \mathbf{R},\, u_{\lambda\lambda} = 1)$,
(ii) $L(k) P_\lambda^{(1/k)}(x) = h(\lambda) P_\lambda^{(1/k)}(x) \quad h(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda_i + k(n+1-2i))$.
$P_\lambda^{(1/k)}(x)$ を Jack 多項式という．

例えば

$$P_{(2,0)}^{(1/k)}(x) = m_{(2,0)}(x) + \frac{2k}{1+k} m_{(1,1)}(x),$$

$$P_{(3,0,0)}^{(1/k)}(x) = m_{(3,0,0)}(x) + \frac{3k}{2+k} m_{(2,1,0)}(x) + \frac{6k^2}{(1+k)(2+k)} m_{(1,1,1)}(x)$$

である．$P_\lambda^{(1/k)}(x)$ は $|\lambda|$ 次斉次多項式である．また，Jack 多項式は内積

$$(f,g)_k = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) g(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \prod_{1\le j<l\le n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_l}|^{2k} d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

に関して $\mathbf{R}[x]^{S_n}$ の直交基底をなす．

3 Lauricella の超幾何級数 F_D

この節では，[2], [4], [6] に従って Lauricella の F_D について述べる．

$$\begin{cases} (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \ge 1), \\ (a)_0 = 1 & (n=0) \end{cases}$$

とおく．$n-1$ 変数の超幾何級数 Lauricella の F_D は

$$\begin{aligned} &F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \gamma; z_1, \cdots, z_{n-1}) \\ &\quad = \sum_{m_1,\cdots,m_{n-1}=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\cdots+m_{n-1}} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_{n-1})_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+\cdots+m_{n-1}} m_1! \cdots m_{n-1}!} z_1^{m_1} \cdots z_{n-1}^{m_{n-1}} \quad (\gamma \ne 0, -1, -2, \cdots) \end{aligned}$$

で定義される．上の級数は $|z_1| < 1, \cdots, |z_{n-1}| < 1$ で収束する．F_D は積分表示

$$F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \gamma; z_1, \cdots, z_{n-1}) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \prod_{i=1}^{n-1} (1-z_i t)^{-\beta_i} dt$$

をもつ．上の積分は $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ のとき収束する．

F_D は 1 変数のとき Gauss の超幾何級数

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n $$

であり，2 変数のとき Appell の超幾何級数

$$ F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma;z_1,z_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2}(\beta_1)_{m_1}(\beta_2)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}m_1!m_2!}z_1^{m_1}z_2^{m_2} $$

である（[1]）．

定理 2 ([4], [6])

$u(z_1,\cdots,z_{n-1})=F_D(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\gamma;z_1,\cdots,z_{n-1})$ は，微分方程式系

$$ \begin{cases} \vartheta_i\left(\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l+\gamma-1\right)u=z_i(\vartheta_i+\beta_i)\left(\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l+\alpha\right)u \quad (i=1,\cdots,n-1), \\ z_i(\vartheta_i+\beta_i)\vartheta_j u=z_j\vartheta_i(\vartheta_j+\beta_j)u \quad (1\le i<j\le n-1) \end{cases} $$

の $(0,\cdots,0)$ の近傍で解析的で $u(0,\cdots,0)=1$ を満たす一意解である．

ここで，$\vartheta_i=z_i\dfrac{\partial}{\partial z_i}$ $(i=1,\cdots,n-1)$ とおいた．

補題 1 ([6])

変換公式

$$ \begin{aligned} &F_D(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\gamma;z_1,\cdots,z_{n-1}) \\ &\quad=(1-z_{n-1})^{-\alpha}F_D\left(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-2},\gamma-\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i,\gamma;\frac{z_{n-1}-z_1}{z_{n-1}-1},\cdots,\frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{z_{n-1}-1},\frac{z_{n-1}}{z_{n-1}-1}\right) \end{aligned} $$

が成り立つ．

4 主結果

この節では，[12] に従って本研究の主結果を述べる．

4.1 Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数

n を 2 以上の整数とし，p,q は $p\ge q\ge 0$ を満たす整数とする．分割 $(p,q,\cdots,q)$ に対する n 変数の Jack 多項式は $n-1$ 変数の Lauricella の F_D を用いて具体的に表される．

定理 3 (T [12])

パラメーター $k>0$ と分割 $\lambda=(p,q,\cdots,q)$ に対して，

(i) $P^{(1/k)}_{(p,q,\cdots,q)}(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{(nk)_{p-q}}{(k)_{p-q}}\displaystyle\prod_{l=1}^{n-1}x_l^q x_n^p F_D\left(q-p,k,\cdots,k,nk;1-\frac{x_1}{x_n},\cdots,1-\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$,

(ii) $P^{(1/k)}_{(p,q,\cdots,q)}(x_1,\cdots,x_n)=\displaystyle\prod_{l=1}^{n-1}x_l^q x_n^p F_D\left(q-p,k,\cdots,k,q-p-k+1;\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$

が成り立つ．

$q-p$ は 0 以下の整数なので，右辺の超幾何級数は有限和になる．

$n=2$ のとき，定理 3 (i) は

$$P_{(p,q)}^{(1/k)}(x_1,x_2)=x_1^q x_2^p {}_2F_1\left(q-p,k,2k;1-\frac{x_1}{x_2}\right)$$

となる．Gauss の超幾何級数の変換公式（[8]）によりこれは

$$P_{(p,q)}^{(1/k)}(x_1,x_2)=\frac{(2k)_{p-q}}{(k)_{p-q}}(x_1x_2)^{\frac{1}{2}(p+q)}{}_2F_1\left(q-p,p-q+2k,k+\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$$

と書き直せる．この等式は Lassalle [5] に記されている．つまり，定理 3 (i) は $n=2$ の場合に知られている結果の一般化と見なすことができる．

4.2 定理 3 の証明の概略

(i) の証明

定理 3 (i) は斉次性を用いて，分割 $\lambda=(p,q\cdots,q)$ に対する n 変数の $P_\lambda^{(1/k)}(x)$ の満たす微分方程式 $L(k)P_\lambda^{(1/k)}(x)=h(\lambda)P_\lambda^{(1/k)}(x)$ と $n-1$ 変数の F_D の満たす微分方程式系を関係づけることにより証明される．これは $n=3$, $k=1/2$ のときに関口 [9] が用いた手法を拡張したものである．

$\nu\in\mathbf{C}$ に対して，

$$u(y_1,\cdots,y_{n-1})=F_D(-\nu,k,\cdots,k,nk;1-y_1,\cdots,1-y_{n-1}) \tag{1}$$

は，微分方程式系

$$\begin{cases}\vartheta_i\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l-\nu-k\right)u=y_i(\vartheta_i+k)\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l-\nu\right)u \quad (i=1,\cdots,n-1),\\ y_i(\vartheta_i+k)\vartheta_j u=y_j\vartheta_i(\vartheta_j+k)u \quad (1\le i<j\le n-1)\end{cases} \tag{2}$$

の $(1,\cdots,1)$ の近傍で解析的で $u(1,\cdots,1)=1$ を満たす一意解であることが変数変換と定理 2 により示される．

$\nu=p-q$ のとき，(1) で与えられる u を用いて

$$P(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{l=1}^{n-1}x_l^q x_n^p u\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

とおくと，F_D の定義と補題 1 から P は対称多項式であることが示される．また，微分方程式系 (2) から

$$L(k)P=h(\lambda)P$$

が導かれる．定理 1 から $P_\lambda=cP$ を満たす定数 c が唯一つ存在する．この両辺をモノミアル対称多項式の一次結合で表したときの $m_\lambda(x)$ の係数を比較することにより，定数 c が決まり定理 3 (i) が導かれる．

(ii) の証明

微分方程式系 (2) は

$$u(y_1, \cdots, y_{n-1}) = F_D(-\nu, k, \cdots, k, -\nu - k + 1; y_1, \cdots, y_{n-1})$$

を解にもつが，$\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ のとき，これは多項式になり，一意性より

$$F_D(-\nu, k, \cdots, k, -\nu - k + 1; y_1, \cdots, y_{n-1}) = \frac{(nk)_\nu}{(k)_\nu} F_D(-\nu, k, \cdots, k, nk; 1 - y_1, \cdots, 1 - y_{n-1})$$

が成り立つ．これより (ii) が示される．

本講演で述べた結果に関連して，定理 3 (i) の証明中の $\nu \in \mathbf{C}$ に対する微分方程式系 (2) の解析解 (1) は，退化したパラメーターに対する A 型の Heckman-Opdam の超幾何級数に対応していることを示野信一氏（関西学院大学）との共同研究で示した（[11]）.

参考文献

[1] P. Appell, J. Kampé de Feriet: Fonctions hypergéometriques et hypersphériques - polynômes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] 原岡喜重, 「超幾何関数」, 朝倉書店, 2002.

[3] 堀田良之・渡辺敬一・庄司俊明・三町勝久, 「群論の進化」, 岩波書店, 2004.

[4] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions, Vieweg+Teubner Verlag, 1991.

[5] M. Lassalle, Polynômes de Jacobi généralisés, C. R. Acad. Sci. Paris, **312** (1991), Série I, 425–428.

[6] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1893), 111–158.

[7] I. G. Macdonald, Commuting differential operators and zonal spherical functions, Algebraic groups, Utrecht 1986,189–200, Lecture Notes in Math., **1271** (1987), Springer, Berlin.

[8] 森口繁一 他, 「数学公式」, 岩波書店, 1960.

[9] 関口次郎, 「$SL(3, \mathbf{R})$ の帯球函数について」, 数理解析研究所講究録 266 巻, (1976), 259–274.

[10] 白石潤一, 「量子可積分系入門」, サイエンス社, 2003.

[11] N. Shimeno and Y. Tamaoka, The hypergeometric function for the root system of type A with a certain degenerate parameter, 準備中.

[12] 玉岡優一, 「Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数」, 2017 年度修士論文, 関西学院大学大学院理工学研究科.