Strichartz estimates for non-degenerate Schrödinger equations

平良　晃一 (Kouichi TAIRA)*

January 15, 2018

Abstract

本講演では非退化型 Schrödinger 方程式上の Strichartz 評価について解説する. 非退化型 Schrödinger 方程式とは、Lorentz 計量 (より一般に非退化計量) に付随したダランベルシアンに関する Schrödinger 方程式である. トーラス上では、Y. Wang により, Riemann 型とは異なった Strichartz 評価が得られることも知られている.

1　導入

本講演では, 非退化 Schrödinger 方程式に対する Strichartz 評価についての講演者の結果について紹介する. ここで, 非退化 Schrödinger 方程式とは以下のような方程式である.

自然数 $n \geq 2$ を次元として, g を $\mathbb{R}^n$ 上の指数 k の擬 Riemann 計量とする. つまり、g は $\mathbb{R}^n$ 上の可逆行列値関数 $g(x) = (g^{ij}(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$ で与えられ, 負の固有値の数が k 個であるとする. このとき, g に付随する Laplace 作用素 P, 主シンボル $p \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する;

$$P = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(g^{ij}(x)\partial_{x_i}),\ p(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

そこで非退化 Schrödinger 方程式とは, Laplace 作用素 P を Hamiltonian とする Schrödinger 方程式:

$$\begin{cases} i\partial_t u + Pu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1.1}$$

で与えられる方程式である. この方程式は, Davey-Stewartson 方程式系という水面波を記述するモデルの一方程式でもある. しかし本研究では, この方程式を Schrödinger 方程式の枠組みの中で考察する.

*本研究は JSPS 科研費 17J04478 の助成を受けたものです. Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tokyo, Japan, Email: `taira@ms.u-tokyo.ac.jp`.

Schrödinger 方程式とその解の平滑化作用 (smoothing effect) と主シンボル p が生成する Hamilton 流の性質の間には密接な関係があることが知られている. これは Schrödinger 方程式の解が量子力学的粒子の運動を表し, Hamilton 流の積分曲線を古典力学的粒子の運動を表しているとみると, 量子-古典対応の一種であると考えられる. Strichartz 評価とは, Schrödinger 方程式の解の平滑化作用を表す $L^p - L^q$ 型の不等式である. コンパクト多様体上など, Hamilton 流が捕捉される場合には Euclid 空間の場合と比べて, 一般に平滑化の loss が生じることが知られている. 一方で, Burq-Guillarmou-Hassell[3] により, 捕捉軌道が存在するが, Strichartz 評価の平滑化の loss が起こらない Riemann 多様体の存在が示された. さらに, $k=0$ と $k \neq 0$ の場合を比較しても Schrödinger 方程式の解の平滑化作用は異なることが知られている. Wang[5] は二次元平坦 Lorentzian トーラス上での Strichartz 評価は Bourgain[2] による二次元平坦 Riemannian トーラスの場合とは, 平滑化の loss の仕方が異なることを示した. これは Laplace 作用素 P の固有値の分布が異なることに起因するものであり, 同じような Hamilton 流であっても $k=0$ と $k \neq 0$ とでは異なる平滑化の loss が生じることがわかる. 本研究では, $\mathbb{R}^n$ 上で Hamilton 流が非捕捉軌道を持たない場合には, Strichartz 評価の平滑化の loss が起こらないことを示すことができた. これは $k=0$ の結果 (Boulclet-Tzvetkov[1]) の拡張であるが, 技術的な理由により, 更なる仮定が必要となる.

2 主結果

まず, 以下の三つの仮定を考える.

Assumption A. 計量 g は定数係数計量の長距離型の摂動である. つまり,

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1, \quad 1 \leq i = j \leq n-k, \\ -1, \quad n-k+1 \leq i = j \leq n, \\ 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

とおいて, ある $\mu > 0$ に対して任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対してある $C_\alpha > 0$ が存在して,

$$|\partial_\alpha (g^{ij}(x) - \delta_{ij}^k)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}(\mu+|\alpha|)},$$

が成り立つ.

Assumption B. Hamilton 流が非捕捉的 (non-trapping) である. つまり, 0 でない運動量を持つ Hamliton 流の積分曲線 $(z(t), \zeta(t)) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して,

$$|z(t)| \to \infty, \quad \text{as} \quad t \to \pm\infty,$$

が成り立つ.

Assumption C. 正の保存則を持つ. つまり, ある $q \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ が存在して,

$$\begin{cases} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(2-\mu)}, \\ q(x,\xi) \geq C(1+|\xi|)^2, \\ \{p,q\} = 0, \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, $\{,\}$ は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の標準的な Poisson 括弧積である.

また, admissible pair を定義する.

Definition 1. 実数の組 (p, q) が admissible であるとは,

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad q \geq 2, \quad (p, q, n) \neq (2, \infty, 2),$$

を満たすことをいう.

そこで, 講演者の主結果は以下の通りである.

Theorem 2.1 ([4])**.** (1) Assumption A と C を仮定する. このとき, P は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上本質的自己共役である. 特に方程式 (1.1) は一意解 $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ を持つ.

(2) Assumption A と C を仮定する. ある $R > 0$ が存在して, 任意の admissible pair (p, q) と任意の $T > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して, (1.1) の解 u に対し,

$$\|u\|_{L^p([-T,T], L^q(|x| \geq R))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

(3) Assumption A と B と C を仮定する. 任意の $R > 0$ と任意の admissible pair (p, q) と任意の $T > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して, (1.1) の解 u に対し,

$$\|u\|_{L^p([-T,T], L^q(|x| \leq R))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

References

[1] Jean-Marc Bouclet and Nikolay Tzvetkov. Strichartz estimates for long range perturbations. Amer. J. Math., Vol. 129, No. 6, pp. 15651609, 2007.

[2] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. Geom. Funct. Anal., Vol. 3, No. 2, pp. 107156, 1993.

[3] Nicolas Burq, Colin Guillarmou, and Andrew Hassell. Strichartz estimates without loss on manifolds with hyperbolic trapped geodesics. Geom. Funct. Anal., Vol. 20, No. 3, pp. 627656, 2010.

Ann. 318 (2000), 355 389.

[4] Kouichi Taira. Strichartz estimates for non-degenerate Schrödinger equations. `arxiv:1708.01989v1`

[5] Yuzhao Wang. Periodic cubic hyperbolic Schrödinger equation on T2. J. Funct. Anal., Vol. 265, No. 3, pp. 424434, 2013.