Sierpiński gasket 上の
エネルギー密度関数の不連続性

伊縫　寛治 (INUI Kanji)
京都大学　大学院人間・環境学研究科　共生人間学専攻　博士後期課程 1 年

1　研究の背景・導入

フラクタル図形上の解析学は, 複雑な構造をもつ対象におけるさまざまな現象を解析するため, 理想化されたモデルにおける解析の理論として研究が進められてきた. 現象の例をあげると, フラクタル図形上において振動はどのように伝わるか. あるいは, フラクタル図形上において熱はどのように拡散するかといったものがある. この理論は物理学や化学および生物学などの分野において重要性が認識され始め, ここ 30 年で大きく理論が発展した.

2 次元 Sierpiński gasket (以下, 2 次元 S.G. と表す) は, 理想的な自己相似性を持つフラクタル図形の典型例である. S.G. 上には標準的な Dirichlet 形式と呼ばれる 2 次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定まり, $\mathcal{F}$ の元 f に対して, そのエネルギー測度 ν_f が定まる (定義 2.9). さらに, 文献 [4] において導入された, 任意のエネルギー測度を絶対連続とする測度 ν(しばしば Kusuoka measure と呼ばれる [5, Section 5.3]) を用いて, 2 次元 S.G. 上のエネルギー密度関数 (Radon–Nikodym 導関数) $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ を考えることができる.

これは $\mathbb{R}^d$ 上の標準 Dirichlet 形式 $\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d}(1/2)\cdot(\nabla f(x), \nabla g(x))\ \mathrm{d}x$ に対して, f のエネルギー測度が $\nu_f(\mathrm{d}x) = (1/2)\cdot|\nabla f|^2\ \mathrm{d}x$ と定まり, ν_f は d 次元 Lebesgue 測度に関し絶対連続であることから, $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}x$ が考えられることの類似である.

これらの関係を表にしたものは以下の通りである.

空間	$\mathbb{R}^d$	2 次元 S.G.
2 次形式	$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x$	$\mathcal{E}(f,g)$
エネルギー測度	$\nu_f(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2\mathrm{d}x$	ν_f
空間の測度 m	d 次元 Lebesgue 測度	Kusuoka measure ν

表 1　$\mathbb{R}^d$ と 2 次元 S.G. の比較

ここで, 2 次元 S.G. 上において, $\mathcal{F}$ に属する任意の関数 f に対応するエネルギー測度 ν_f は正規化された Hausdorff 測度 μ に対し特異であることが知られていることに注意する [4].

$\mathbb{R}^d$ 上ではエネルギー密度関数は $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}x = (1/2)\cdot|\nabla f|^2$ と表せることより, f が C^1-級関数な

らばエネルギー密度関数は連続な修正がとれる．一方 2 次元 S.G. 上のエネルギー密度関数について, Bell, Ho, and Strichartz は次のような結果を得た [1].

定理 1.1. 2 次元 S.G. 上の定数関数でない調和関数 h に対して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の ν-修正は S.G. 上の全ての点で不連続である.

このような不連続性はフラクタル図形特有の性質であると考えられ, より一般のフラクタル図形に対しても同様の主張の成立が予想される．本稿では, 2 次元 S.G. を高次元に自然に拡張した N 次元 Sierpiński gasket において議論を行い, 類似の結果を紹介する (定理 2.13)．またこの研究は京都大学 理学研究科 日野正訓教授の指導のもと進められたものである.

2 設定と主定理

本稿の設定は [3, 5] に基づく．以下では N を 2 以上の自然数とする.

2.1 N 次元 Sierpiński gasket 上のエネルギー

始めに, N 次元 Sierpiński gasket の定義を与える.

定義 2.1. $\mathbb{R}^N$ 内における N 単体を 1 つとり, その頂点を $p_0, p_1, \ldots, p_N$ とする． $V_0 := \{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$ とする． さらに, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ に対して, $F_i \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $F_i(x) := (x + p_i)/2$ と定める．このとき,

$$K = \bigcup_{i=0}^{N} F_i(K)$$

を満たす唯一の空でないコンパクト集合 K を N 次元 Sierpiński gasket という.

この集合を SG と書き, 以後 N 次元 Sierpiński gasket を省略して N 次元 S.G. と記すことにする．以後, 次元 N は固定して考えるため, 記号 SG には N を明示しない.

定義 2.2. $W_0 := \{\emptyset\}$, $W_m := \{0, 1, \ldots, N\}^m$ $(m \in \mathbb{N}_{\geq 1})$, $W_* := \bigcup_{n=0}^{\infty} W_m$ と定義し, W_* の元を有限の長さを持つ word と呼ぶ．W_m の元を $w_1 w_2 \cdots w_m$ と表す．また, $w \in W_m$ と $w' \in W_n$ に対し, その積 ww' を $w_1 w_2 \cdots w_m w'_1 w'_2 \cdots w'_n \in W_{m+n}$ と定義する.

$w = w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m$ について $F_w := F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}$ と定める．また, $F_\emptyset$ は SG 上の恒等写像と定める．さらに

$$V_m := \bigcup_{w \in W_m} F_w(V_0), \quad V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$$

と定義する.

また, V_m $(m \in \mathbb{N}_{\geq 0})$ 上の辺集合 E_m を以下で定義する.

$$(x, y) \in E_m \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists} w \in W_m \ {}^{\exists} i, j \in W_1 \text{ s.t. } i \neq j,\ x = F_w(p_i),\ y = F_w(p_j).$$

SG の構成法により, 集合列 $\{V_m\}_{m=0}^{\infty}$ は単調増大で, V_* の $\mathbb{R}^N$ における閉包は N 次元 S.G. と一致することが知られている. これにより, SG は (V_m, E_m) という頂点集合に関して単調増大する有限連結グラフのの列により近似されると考えることができる. $N = 2$ の場合の図を以下に示す.

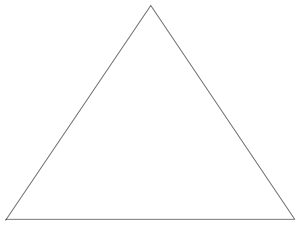

図 1　近似グラフ (V_0,E_0)

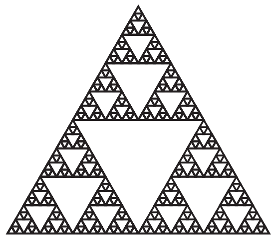

図 2　2 次元 S.G.

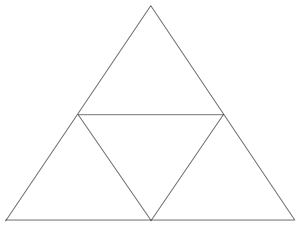

図 3　近似グラフ (V_1,E_1)

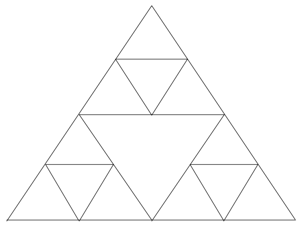

図 4　近似グラフ (V_2,E_2)

次に, SG 上の 2 次形式を導入する. 集合 V に対し, V 上の実数値関数全体からなるベクトル空間を $l(V)$ で表す.

定義 2.3. $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする. f, $g \in l(V_m)$ とするとき, V_m 上の 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ を

$$\mathcal{E}^{(m)}(f, g) := \left(\frac{N+3}{N+1}\right)^m \frac{1}{2} \sum_{x \in V_m} \sum_{(x,y) \in E_m} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))$$

と定める.
ただし, $x \in V_m$ に対し, $\displaystyle\sum_{(x,y)\in E_m}$ は $(x, y) \in E_m$ なる $y \in V_m$ に関する和を表す.

この 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ は $\mathcal{E}(f, g) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x$ の類似であることに注意する. この 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ について次の命題が成立する.

命題 2.4 ([3, Lemma 2.2])**.** $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ と $f \in l(V_m)$ について, $\inf\{\mathcal{E}^{(m+1)}(g, g) \mid g \in l(V_{m+1}), g|_{V_m} = f\}$ を達成する $g \in l(V_{m+1})$ がただ一つ存在し, それを $\tilde{f}$ で表すと,

$$\mathcal{E}^{(m+1)}(\tilde{f}, \tilde{f}) = \mathcal{E}^{(m)}(f, f)$$

が成立する.

また, この命題より次が成立する.

定理 2.5 ([3, Theorem 3.2.4])**.** 任意の $f \in l(V_*)$ に対し, 数列 $\{\mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m})\}_{m=0}^{\infty}$ は単調非減少である. さらに, $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ を仮定すると, f は V_* 上一様連続である. 特に, 任意の $f_0 \in V_0$ に対して, f は V_* 上一様連続である.

一般に, $\mathbb{R}^N$ の部分集合 A 上の一様連続関数は A の $\mathbb{R}^N$ における閉包上の連続関数に一意的に拡張されることに注意すれば, $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ なる $f \in l(V_*)$ は $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ なる $f \in C(\mathrm{SG})$ と 1 対 1 対応する. さらに次の命題が成立する.

命題 2.6 ([3, Theorem 2.2.6])**.** $\mathcal{F} := \{f \in C(\mathrm{SG}) \mid \mathcal{E}(f, f) := \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty\}$ とすると $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$-代数である. さらに, $f, g \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2}\left\{\mathcal{E}(f+g, f+g) - \mathcal{E}(f, f) - \mathcal{E}(g, g)\right\}$$

と定めるとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は非負定値の 2 次形式となる.

定義 2.7. この SG 上の 2 次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を SG 上のエネルギーと呼ぶ.

2.2 調和関数とエネルギー測度と Kusuoka measure

次に SG 上の調和関数の定義を与える. 命題 2.4 により, 任意の $h^0 \in l(V_0)$ から $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(h^*|_{V_m}, h^*|_{V_m}) = \mathcal{E}^{(0)}(h^0, h^0)$ なる $h^* \in l(V_*)$ を一意的に構成できることより, この対応を $\iota(h^0) := h^*$ で表す.

定義 2.8. $h^0 \in l(V_0)$ に対して, $\iota(h^0)$ を SG 上に連続的に一意に拡張した SG 上の関数を SG 上の調和関数と呼ぶ. 調和関数全体の集合を $\mathcal{H}$ で表す.

先ほど定めた $\iota\colon l(V_0) \to l(V_*)$ は全単射かつ線型であることが知られている. 加えて定義 2.8 の連続拡張も全単射かつ線型であることから, $\mathcal{H}$ と $l(V_0)$ はベクトル空間として同一視できる. よって $\mathcal{H} \ni h \mapsto (h(p_0), \dots, h(p_N)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ という対応により, $\mathcal{H}$ と $\mathbb{R}^{N+1}$ はベクトル空間として同一視できるため, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{F}$ の $(N+1)$-次元部分ベクトル空間であることが示される.

次にエネルギー測度の定義を与える. 次の命題より, $\mathcal{F}$ の各元に対して SG 上の測度が定まる.

命題 2.9 ([5, Section 5.3])**.** $f \in \mathcal{F}$ に対し, 以下を満たす SG 上の測度 ν_f がただ一つ存在する.

$$\int_{SG} \varphi \, \mathrm{d}\nu_f = \mathcal{E}(\varphi f, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, f^2) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathcal{F}).$$

定義 2.10. ν_f を関数 f に対応するエネルギー測度と呼ぶ.

命題 2.9 を $\mathbb{R}^d$ の場合の標準的な Dirichlet 形式にに適応させると, 右辺は

$$\mathcal{E}(\varphi f, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, f^2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla(\varphi f), \nabla f)_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \varphi, \nabla(f^2))_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (f\ \nabla\varphi, \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi\ \nabla f, \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi, 2f\ \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \frac{1}{2}|\nabla f|^2\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

と表せることに注意する.

次に Kusuoka measure の定義を与える.

定義 2.11. $i \in W_1$ に対して, $h_i^0 \in l(V_0)$ を $h_i^0(p_j) := \delta_{ij} \quad (j \in W_1)$ と定める. ただし, δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す. それらを SG 上の調和関数に拡張したものを $h_i \in \mathcal{H} \quad (i \in W_1)$ で表す. さらに, $\nu := \sum_{i \in W_1} \nu_{h_i}$ と定め, これを Kusuoka measure と呼ぶ.

定理 2.12 ([4], [5, Theorem 5.3.1])**.** 任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して, ν_h は ν に対し絶対連続である.

これにより, エネルギー密度関数 $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu \in L^1(\mathrm{SG}, \nu)$ が定義される.

2.3 主結果

次が本稿の主結果である. この主結果は [2] で発表されたものである.

定理 2.13 ([2, Theorem 2.16])**.** $h \in \mathcal{H}$ は定数関数でないと仮定する. このとき, $\nu(\mathrm{SG} \setminus A) = 0$ なる $A \subset \mathrm{SG}$ が存在して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の ν-修正は A の各点で不連続となる.

参考文献

[1] R. Bell, C. W. Ho and R. S. Strichartz, Energy measures of harmonic functions on the Sierpiski gasket, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 831–868.

[2] K. Inui, Discontinuity of energy density function on Sierpiński gasket (in Japanese), Master thesis of Osaka University, (2017).

[3] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics **143**, Cambridge University Press (2001).

[4] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[5] R. S. Strichartz, *Differential equations on fractals: a tutorial*, Princeton University Press (2006).