# The affine property of quasi-free states on self-dual CAR algebras

澤田友佑 (Yusuke SAWADA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

場の量子論において, Fermi 統計に従う粒子は正準反交換関係 (Canonical Anticommutation Relation) を満たす作用素の集まりによって記述される. そのような作用素の成す C*-環 $A$ は CAR 環と呼ばれ, 系の状態は.$A$ 上の汎関数として表される. CAR 環上のゲージ不変な準自由状態の分類は Powers-Størmer[2] によって成され, Araki[1] はそれを任意の準自由状態に対して行った.

自己双対性を持つ CAR 環上の準自由状態は共分散作用素と 1 対 1 に対応している. 本講演では, その対応が凸結合をいつ保存するか, という問題を有限次元性と可換性の条件の下解決したのでそれを紹介する.

まず自己双対 CAR 環と, その上の準自由状態は次で定義される.

**Definition 1.** $\mathcal{H}$ を複素 *Hilbert* 空間, $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を反ユニタリ対合 (すなわち, $\Gamma^2 = \mathbf{1}, (\Gamma\xi, \Gamma\eta) = (\eta, \xi)$ を満たす) とする. 自己双対 *CAR* 環 $A(\mathcal{H}, \Gamma)$ とは, $\{b(\xi) \mid \xi \in \mathcal{H}\}$ で生成され, 次を関係式とするような普遍 $C^*$-環のことである.

$$
\begin{aligned}
&b(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha b(\xi) + \beta b(\eta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \xi, \eta \in \mathcal{H}),\\
&b(\Gamma\xi) = b(\xi)^* \qquad (\xi \in \mathcal{H}),\\
&[b(\varepsilon_0), b(\varepsilon_i)]_+ := b(\xi)b(\eta)^* + b(\eta)^* b(\xi) = (\xi, \eta)\mathbf{1} \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).
\end{aligned}
$$

$A(\mathcal{H}, \Gamma)$ 上の正値汎関数 $\phi$ が $\phi(\mathbf{1}) = 1$ を満たすとき, $\phi$ を状態と呼び, 等式

$$
\phi(b(\xi_1)\cdots b(\xi_k)) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \displaystyle\sum_{\sigma \in T_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \phi(b(\xi_{\sigma(i)}) b(\xi_{\sigma(i+n)})) & (k = 2n), \\ 0 \qquad (k = 2n+1), \end{cases}
$$

を満たすとき, $\phi$ は準自由であると呼ぶ. ただし,

$$T_{2n} := \{\sigma \in S_{2n} \mid \sigma(1) < \cdots \sigma(n), \sigma(i) < \sigma(i+n)\ \ (i = 1, \cdots, n)\}$$

である.

$A(\mathcal{H}, \Gamma)$ 上の準自由状態 $\phi$ に対して,

$$(S_\phi \xi, \eta) = \phi(b(\eta)^* b(\xi)) \tag{1}$$

を満たすような $\mathcal{H}$ 上の作用素 $S_\phi$ が存在する. $S_\phi$ は

$$0 \leq S \leq \mathbf{1}, \tag{2}$$
$$\Gamma S \Gamma = \mathbf{1} - S. \tag{3}$$

を満たしている. 逆に, $\mathcal{H}$ 上の作用素 $S$ が (2), (3) を満たしているとき, (1) を満たす準自由状態 $\phi_S$ がただ一つ存在することが知られている. このような $S$ を共分散作用素と呼ぶ.

[3] において, 2 つの共分散作用素 $S, S'$ がアファイン性

$$\lambda \phi_S + (1-\lambda)\phi_{S'} = \phi_{\lambda S + (1-\lambda) S'} \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

を持つための必要条件は $(S\xi, \Gamma\xi) = (S'\xi, \Gamma\xi)$ $(\xi, \eta \in \mathcal{H})$ を満たすことであることを示した.

また, $\mathcal{H}$ が偶数次元 $2n$ を持つとき, CAR 環とその上の (共分散作用素 $S$ に付随する) 準自由状態は以下で与えられる.

$$A(\mathcal{H}, \Gamma) = M(2, \mathbb{C})^{\otimes n},$$
$$\phi_S(b) = \mathrm{Tr}\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 1-\alpha_i \end{pmatrix}\right) b\right) \qquad (b \in M(2, \mathbb{C})^{\otimes n}).$$

ただし, $\alpha_i$ は $S$ の固有値であり

$$S\varepsilon_i = \alpha_i \varepsilon_i,\ S\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha_i)\Gamma\varepsilon_i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

となるように $\mathcal{H}$ の基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \Gamma\varepsilon_1, \cdots, \Gamma\varepsilon_n$ をとり対角化しておく. このとき, 次が成り立つ.

**Theorem 2.** ([3]) $S, S'$ を $2n$ 次元 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の可換な共分散作用素とし, 基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \Gamma\varepsilon_1, \cdots, \Gamma\varepsilon_n$ により

$$S\varepsilon_i = \alpha_i \varepsilon_i,\ S\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha_i)\Gamma\varepsilon_i,$$
$$S'\varepsilon_i = \alpha_i' \varepsilon_i,\ S'\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha_i')\Gamma\varepsilon_i$$

で $\alpha_i, \alpha_i'$ が定まっているとする. このとき $(S, S')$ がアファイン性を持つための必要十分条件は高々1つの $i_0 = 1, \cdots, n$ を除いて $\alpha_i = \alpha_i'$ が成り立つことである. 特に, $n = 1$ のときは自動的にアファイン性を持つ.

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が奇数次元を持つ場合は

$$A(\mathcal{H}, \Gamma) = M(2, \mathbb{C})^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}),$$
$$\phi_S(b) = \mathrm{Tr}\left( \left( \left( \bigotimes_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 1-\alpha_i \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) b \right)$$
$$(b \in M(2, \mathbb{C})^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})).$$

となり, Theorem 2 と同様の結果が得られる.

# References


[1] H. Araki, On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1970), 385-442.

[2] R. T. Powers, E. Størmer, Free states of the canonical anticommutation relations, Comm. Math. Phys. 16 (1970), 1-33.

[3] Y. Sawada, in preparation.