Bogoliubov変換を用いた抽象的ϕ^2-モデルの解析

浅原 啓輔 (ASAHARA KEISUKE)　(北海道大学大学院理学院数学専攻)*

1. 導入

場の量子論は電磁場や重力場などの古典場を量子化することで得られる理論である。この理論は物理学において重ね合わせの原理や状態の遷移確率を描像すること，また素粒子の生成，消滅を記述することを要請している。そのため場の量子論を数学的に記述するためには，ヒルベルト空間上のフォック空間を考えるのがよい。また，素粒子にはボソンとフェルミオンの二種類がある。ボソンは何個でも同一の状態になることができる。したがってボソン系を考察する場合，ボソンフォック空間というフォック空間を対称化した空間を考える必要がある。この場合，考察下の系の状態はボソンフォック空間のベクトルで記述され，物理量はボソンフォック空間上の自己共役作用素で記述されると解釈される。またこのとき，物理量を観測した際の実現値全体は自己共役作用素のスペクトルと一致する。こうして場の量子論の研究においてボソンフォック空間上の作用素のスペクトル解析が重要であることがわかる。

多くの場合ハミルトニアン H は $H := H_0 + H_I$ の形で表される。ここで H_0 はスペクトルがよくわかっている自己共役作用素である。H が物理量として意味を持つためには自己共役作用素であることが要求されるが，一般にこれは非自明である。そのためハミルトニアンの解析をするにあたり，自己共役性を示すこととそのスペクトル特性を調べることが肝要である。さらに，系が安定していることを示す基底状態の存在を証明することは，重要な問題の1つである。本紙では抽象的ϕ^2-モデルのスペクトル解析をBogoliubov変換を用いて行っていく。

2. モデルの定義

まずいくつか記号と用語を導入していく。一般に稠密に定義された可閉作用素 T に対して T^* はその共役作用素，$\overline{T}$ はその閉包を表すとする。また自己共役作用素 T に対して，その固有ベクトルを T の束縛状態という。特に T が下に有界な場合で，かつ最低エネルギー $E_0 := \inf \sigma(T)$ が固有値であるとき，固有値 E_0 に対する固有ベクトルを基底状態という。ここで $\sigma(T)$ は T のスペクトル全体を表す。

次に抽象的ϕ^2-モデルを定義していく。本研究は，対相互作用モデルを抽象的なヒルベルト空間上に一般化したハミルトニアンのスペクトル解析をしたものである。対相互作用モデルのラグランジアンは $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を古典場として，

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\{(\partial_t\phi(t,x))^2 - (\nabla\phi(t,x))^2 - m^2\phi(t,x)^2\}dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\phi(t,x)V(x,x')\phi(t,x')dxdx' \end{aligned}$$

で表されるもののうち，特に $V(x,x') = -\lambda\rho(x)\rho(x')$ に対するものである。ここで $\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数であり，ρ は適切な関数である。このモデルは先行研究 [1],[2] などに

本研究は船川大樹氏 (北海道大学大学院理学院) との共同研究である。
キーワード：場の量子論, Bogoliubov 変換
* 〒060-0808 北海道札幌市北区北8条西5丁目 北海道大学 大学院理学院数学専攻
e-mail: asahara@math.sci.hokudai.ac.jp

おいて研究されている。上記の対相互作用モデルを，抽象的なヒルベルト空間$\mathscr{H}$ 上のボソンフォック空間$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{symm}}^{n} \mathscr{H}$ ではたらく以下の線形作用素$H(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ に一般化する：

$$H(\lambda) := \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{\lambda}{2}\Phi_{\mathrm{s}}(g)^2.$$

ここで $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素 T による第二量子化作用素で, $\Phi_{\mathrm{s}}(g)$ $(g \in \mathscr{H})$ は Segal 場を表しそれぞれ以下のように定義される作用素である:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T) &:= \overline{\oplus_{n=0}^{\infty} T_b^{(n)}}, \\
T_b^{(n)} &:= \overline{\sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{T}^{j-\mathrm{th}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \restriction \otimes_s^n \mathrm{D}(T)},\ n \geq 1,\ T_b^{(0)} := 0, \\
\Phi_{\mathrm{s}}(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(A(f) + A(f)^*)}, A(f) := (A(f)^*)^*,\ f \in \mathscr{H}, \\
(A(f)^*\psi)^{(n+1)} &:= \sqrt{n+1}S_{n+1}(f \otimes \psi^{(n)}), n \geq 0, (A(f)^*\psi)^{(0)} := 0,\ \psi \in \hat{\oplus}_{n=0}^{\infty} \hat{\otimes}_{\mathrm{symm}}^{n}(\mathscr{H}).
\end{aligned}$$

ここで$A(f), A(f)^*$ はそれぞれ消滅作用素，生成作用素と呼ばれる作用素であり，I は$\mathscr{H}$ 上の恒等作用素である。T が非負自己共役作用素であることにより，$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ も非負自己共役作用素であり，0 を固有値として持つ。例として m を非負定数，$\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\omega(k) := (|k|^2 + m^2)^{1/2}$ とし，ω による掛け算作用素を $\hat{\omega}$ と表すとする。すなわち，$\int_{\mathbb{R}^d} |\omega(k)f(k)|^2 dk < \infty$ となるような $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$(\hat{\omega}f)(k) := \omega(k)f(k), k \in \mathbb{R}^d$ とおく。このとき，$\sigma(\hat{\omega}) = [m, \infty)$ であり特に$\sigma(\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\hat{\omega})) = \{0\} \cup [m, \infty)$ となる。また，$\Phi_{\mathrm{s}}(g)$ も自己共役作用素であり，そのスペクトルは $\sigma(\Phi_{\mathrm{s}}(g)) = \mathbb{R}$ である。

3. 主結果

さて，ハミルトニアン $H(\lambda)$ のスペクトル解析を行うにあたり，このまま解析することは難しい。そこで，ハミルトニアンをユニタリ変換することにより解析を行っていく。そのため，まず主結果の証明に用いる道具を紹介する。J を$\mathscr{H}$ 上の共役子とする，すなわち J は$\mathscr{H}$ 上の反線形作用素であり，$J^2 = I$ とすべての $f \in \mathscr{H}$ に対して $\|Jf\| = \|f\|$ を満たす。また$\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素U, V は次を満たすものとする：

$$U^*U - V^*V = I,\ JU^*JV - JV^*JU = 0,$$
$$UU^* - JVV^*J = I,\ UV^* - JVU^*J = 0.$$

このとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上ではたらく作用素$B(f), f \in \mathscr{H}$ を

$$B(f) := A(Uf) + A(JVf)^*,$$

とおく。このとき，対応$(A(\cdot), A(\cdot)^*) \to (B(\cdot), B(\cdot)^*)$ を**Bogoliubov 変換**という。Bogoliubov 変換について，一般に次の定理が知られている。

Theorem 3.1. 全ての$f \in \mathscr{H}$ に対して

$$\mathbb{U}B(f)\mathbb{U}^{-1} = A(f),$$

を満たす $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素$\mathbb{U}$ が存在するための必要十分条件は，V がヒルベルトシュミッド作用素であることである [3]。

T を下に有界な自己共役作用素とし，$E(\cdot)$ をT に同伴するスペクトル測度とする。各$f, g \in \mathscr{H}$ に対して，1次元Borel集合体上の複素測度$\langle g, E(\cdot)f\rangle$ がLebesgue 測度に関して絶対連続であるとき，そのRadon-Nikodym 導関数を $\psi_{g,f}$ と表すとする。特に$\psi_g := \psi_{g,g}$ とする。また，線形作用素 A に対して，A の定義域を$\mathrm{D}(A)$ と書く。

Assumption 3.2. *1.* T は純粋に絶対連続な非負自己共役作用素である。

2. $\mathscr{H}$ 上のある共役子J が存在して $JTJ = T$，$Jg = g$ が成り立つ。

3. $\hat{T} := T - E_0$ に対して$g \in \mathrm{D}(\hat{T}^{-1/2}) \cap \mathrm{D}(T)$ を満たす。

4. $\sup_{x\in\sigma(T)} x^{\pm 1}\psi_g(x) < \infty$. ψ_g は連続で $\psi_g \in C^1(\sigma(T)\backslash\{E_0\})$，また全ての$x \in \sigma(T)\backslash\{E_0\}$ に対して$\psi_g(x) > 0$ を満たす。

5. 次の等式が成り立つ：

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{s-1\le x\le s+1} \left|\frac{d\psi_g(\sqrt{x})}{dx}\right| = 0.$$

6. 全ての$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ と$s \geq 0$ に対して$c \leq |D(s \pm i\varepsilon)| \leq d$ が成り立つような $\varepsilon_0 > 0$ と定数$0 < c \leq d$ が存在する。ただし$D : \mathbb{C}\backslash(0,\infty) \to \mathbb{C}$ は次で定義される複素関数である：

$$D(z) := 1 + \lambda \int_{[E_0,\infty)} \frac{\mu}{\mu^2 - E_0^2 - z} d\|E(\mu)g\|^2,\ z \in \mathbb{C}\backslash(0,\infty).$$

Assumption 3.2 を満たすT と g に対して 2 つの定数$\lambda_{\mathrm{c},0} \leq \lambda_{\mathrm{c}} < 0$ を次で定義する：

$$\lambda_{\mathrm{c},0} := -\|T^{-1/2}g\|^{-2},\ \lambda_{\mathrm{c}} := -\left(\int_{[E_0,\infty)} \frac{\mu}{\mu^2 - E_0^2} d\|E(\mu)g\|^2\right)^{-1}.$$

本研究の主結果は以下の通りである。

Theorem 3.3. T と g は *Assumption 3.2 (1)-(6)* を満たすとする。このとき，以下が成り立つ*:*

1. $\lambda > \lambda_{\mathrm{c}}$ とする。このとき$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 $\mathbb{U}$ と実定数 E_{g} が存在し次を満たす*:*

$$\mathbb{U}H(\lambda)\mathbb{U}^{-1} = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + E_{\mathrm{g}}.$$

特に，$\mathbb{U}^{-1}\Omega_0$ は$H(\lambda)$ の基底状態である。

2. $\lambda_{\mathrm{c},0} < \lambda < \lambda_{\mathrm{c}}$ とする。このとき$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 $\mathbb{V}$，$\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素 ξ と正定数 E_{b} が存在して次を満たす*:*

$$\mathbb{V}H(\lambda)\mathbb{V}^{-1} = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\xi) + E_{\mathrm{g}} - E_{\mathrm{b}}.$$

特に，$\mathbb{V}^{-1}\Omega_0$ は$H(\lambda)$ の基底状態である。さらに，ξ はただ一つの離散固有値β を持つ。よって$\sigma_{\mathrm{p}}(H(\lambda)) = \{n\beta + E_{\mathrm{g}} - E_{\mathrm{b}}\}_{n=0}^{\infty}$ となり，$H(\lambda)$ は束縛状態を持つ。ただし$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ は作用素A の固有値全体である。

参考文献

[1] A.Arai, A Note on Mathematical Analysis of a Pair-Interaction Model in Quantum Field Theory, Unpublished.

[2] E.M.Henley and W.Thirring, Elementary Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

[3] S. N. M. Ruijsenaars, On Bogoliubov transformations. II. The general case. Ann. Phys. 116(1978), 105-134.