Slope equality of plane curve fibrations

大阪大学大学院理学研究科数学専攻　榎園　誠（Makoto Enokizono）

1　主結果

複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の中で d 次斉次多項式 $F(X,Y,Z)$ の零点で定義される代数多様体を d 次平面曲線という．非特異な平面曲線は閉リーマン面である（一般に非特異完備な代数曲線であることと閉リーマン面であることは同値である）．n 次元複素多様体 X に対し，X 上の正則関数のなす層（構造層）を $\mathcal{O}_X$，正則 n 次形式のなす層（標準層）を ω_X と表す．

S をコンパクト複素曲面，B を閉リーマン面とする．全射な正則写像 $f\colon S\to B$ で一般ファイバー F が種数 g の閉リーマン面なものを種数 g の代数曲線束又はファイバー曲面という．本稿では常に代数曲線束 f は種数 $g\geq 2$ とし，相対極小である（ファイバーに含まれる自己交点数が -1 のリーマン球（$\simeq\mathbb{P}^1$）は存在しない）ことを仮定する．代数曲線束 f に対し，次の 3 つの不変量 K_f^2, χ_f, e_f を考える:

- f の相対標準層 $\omega_f=\omega_S\otimes f^*\omega_B^{-1}$ の第 1 チャーン類 $K_f=c_1(\omega_f)\in H^2(S,\mathbb{Z})$ の自己交点数 K_f^2. これは
$$K_f^2=K_S^2-8(g-1)(b-1)$$
を満たす．ここで，$K_S=c_1(\omega_S)$ であり，b は B の種数.

- 相対標準層 ω_f の順像層 $f_*\omega_f$ の次数 $\chi_f=\deg(f_*\omega_f)$. これは
$$\chi_f=\chi(\mathcal{O}_S)-(g-1)(b-1)$$
を満たす．ここで，$\chi(\mathcal{O}_S)$ は構造層 $\mathcal{O}_S$ のオイラー数である.

- 各ファイバー $f^{-1}(p)$ の位相的なオイラー数 $e_{\mathrm{top}}(f^{-1}(p))$ は一般ファイバーの位相的なオイラー数 $e_{\mathrm{top}}(F)=2-2g$ 以上である．その差を全てのファイバーに対し和を取ったものを $e_f=\sum_{p\in B}(e_{\mathrm{top}}(f^{-1}(p))-2+2g)$ と定義する．これは有限和であり
$$e_f=e_{\mathrm{top}}(S)-4(g-1)(b-1)$$
を満たす.

これらの不変量に対し次が成立する．但し f は種数 2 以上で相対極小とする.

- （ネーターの公式）$12\chi_f = K_f^2 + e_f$.
- （ヒルツェブルフの符号数定理）$\mathrm{Sign}(S) = K_f^2 - 8\chi_f$.

  ここで，$\mathrm{Sign}(S)$ は $H^2(S, \mathbb{C})$ 上の交点形式の符号数.
- K_f^2, χ_f, e_f は全て非負である．また，$\chi_f = 0$ であることと f は正則ファイバー束であることは同値であり，$e_f = 0$ であることと f は位相的なファイバー束であることは同値である．

以下では代数曲線束 f は正則ファイバー束ではないと仮定する．2 つの不変量 K_f^2 と χ_f の比 $\lambda_f = K_f^2/\chi_f$ を f のスロープという．スロープの下限に関しては，スロープ不等式と呼ばれる次の不等式が知られている [5]：

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda_f.$$

スロープが不等式の下限を取るときは，f は超楕円曲線束（一般ファイバーは超楕円曲線である代数曲線束）の場合に限ることが知られている．また超楕円曲線束に対しては，スロープ不等式よりも強く次のスロープ等式と呼ばれる等式が成立する．

Theorem 1.1 ([6]) 種数 g の超楕円曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な種数 g の超楕円曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = \frac{4(g-1)}{g}\chi_f + \sum_{p\in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する．

このようなスロープの下限からのずれを与える関数 Ind は堀川指数と呼ばれている．

非超楕円曲線束に関しても，いくつかの場合にスロープ等式が成立することが知られている．例えば，種数 3 の非超楕円曲線束に関しては次の等式が成立する．

Theorem 1.2 ([4]) 種数 3 の非超楕円曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な種数 3 の非超楕円曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = 3\chi_f + \sum_{p\in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する．

本講演の主定理は平面 d 次曲線束（一般ファイバーが非特異平面 d 次曲線である代数曲線束）に関する次のスロープ等式である．

Theorem 1.3 $d \geq 4$ とする．非特異平面 d 次曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な平面 d 次曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = \frac{6(d-3)}{d-2}\chi_f + \sum_{p \in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する．

種数 3 の非超楕円曲線は非特異平面 4 次曲線に他ならないので，Theorem 1.3 は Theorem 1.2 の一般化であるといえる．スロープ等式の応用として，局所符号数と呼ばれる局所不変量が定義でき，次が成立する．

Corollary 1.4 $d \geq 4$ とする．非特異平面 d 次曲線の退化ファイバー芽に対し有理数を与える関数 σ が存在し，任意の平面 d 次曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{p \in B} \sigma(f^{-1}(p))$$

が成立する（このような性質を持つ関数を局所符号数という）．さらに，この局所符号数は [3] で定義される Meyer 関数から決まる局所符号数と一致する．

2 応用

(X, o) を孤立 2 次元超曲面特異点，つまり，$\mathbb{C}^3$ の原点 o の近傍上定義された正則関数 $h(x, y, z)$ を用いて $X = \{h(x, y, z) = 0\}$ と書け，o は X の孤立特異点なものとする．(X, o) の幾何種数 $p_g = p_g(X, o)$ は特異点解消 $\widetilde{X} \to X$ を用いて $\dim H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ と定義される．特異点 (X, o) のスムージング $X_\varepsilon = \{h(x, y, z) = \varepsilon\}$（$\varepsilon > 0$ は十分小）と原点 o 中心の十分小さい閉球 $B \subset \mathbb{C}^3$ との交わり $M = X_\varepsilon \cap B$ は境界付き実 4 次元多様体でありミルナーファイバーと呼ばれる．その第 2 ベッチ数 μ を (X, o) のミルナー数という．μ_+，μ_-，μ_0 をそれぞれ交点形式 $H_2(M, \mathbb{Z}) \times H_2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ の正，負，0 の固有値の数とすると，$\mu = \mu_+ + \mu_- + \mu_0$ と表せる．$\sigma = \mu_+ - \mu_-$ を特異点 (X, o) の符号数という．超曲面特異点に関するダーフィー予想 [1] は次のようなものである．

（弱予想）$\sigma \leq 0$.

（強予想）$6p_g \leq \mu$.

$2p_g = \mu_+ + \mu_0$ より，弱予想は $4p_g \leq \mu + \mu_0$ と同値であり，強予想から弱予想が従うことが分かる．[2] において弱予想は正しいことが示されたが，強予想の方は現在でも未解決である．実は定理 1.3 を用いてダーフィーの強予想に近い形の不等式が導くことが出来る．

Corollary 2.1 (X, o) を孤立 2 次元超曲面特異点とし，有理特異点でない（$p_g > 0$）とする．$A = \pi^{-1}(o)$ を最小特異点解消 $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ の例外集合とする．このとき，不等式

$$6p_g \leq \mu - \chi_{\mathrm{top}}(A),$$

又は同値であるが，

$$\sigma \leq -2p_g - 1 - \#A$$

が成立する．ここで $\chi_{\mathrm{top}}(A)$ は A の位相的オイラー数とし，$\#A$ は A の既約成分の個数とする．特に $\chi_{\mathrm{top}}(A) \geq 0$ である特異点に対し強予想は正しく，どんな孤立 2 次元超曲面特異点に対しても弱予想は正しい．

References

[1] A.H. Durfee, The signature of smoothings of complex surface singularities, Math. Ann. **232** (1978), no.1, 85–98.

[2] J. Kollár and A. Némethi, Durfee's conjecture on the signature of smoothings of surface singularities, to appear in Annales Sc. de l'Ecole Norm. Sup.

[3] Y. Kuno, The mapping class group and the Meyer function for plane curves, Math. Ann. **342** (2008), 923–949.

[4] M. Reid, Problems on pencils of small genus, Preprint (1990) (see his home page).

[5] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.

[6] G. Xiao, π_1 of elliptic and hyperelliptic surfaces, Internat. J. Math. **2** (1991), 599–615.