多項式減衰する初期値を持つ分散効果を伴う粘性保存則方程式の解の長時間挙動

福田一貴 (Ikki FUKUDA)

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士後期課程 1 年

概要

本講演では, 非線形波動を記述する偏微分方程式の一つである, 分散項付きの粘性保存則方程式に対する, 初期値問題の時間大域解の長時間挙動を取り扱う. 初期値は十分小さく, 多項式減衰しているとする. この方程式の解は非線形散逸波と呼ばれる Burgers 方程式の自己相似解に漸近することが知られている. 本講演では, 初期値の減衰度合いが非線形散逸波への漸近の速さにどう影響してくるのかについて, 得られた研究結果を紹介する.

1 導入

本講演では, 非線形波動を記述する偏微分方程式の一つである, 分散効果を伴う粘性保存則方程式に対する初期値問題の時間大域解の長時間挙動について考える:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x + ku_{xxx} &= u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $f(u) = (b/2)u^2 + (c/3)u^3$, $b, c, k \in \mathbb{R}$ とし, 初期値 $u_0(x)$ は以下の仮定を満たすとする:

$$\exists\alpha > 1,\ \exists C > 0 \ \ s.t.\ \ |u_0(x)| \le C(1+|x|)^{-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

特に, 初期値 $u_0(x)$ は仮定 (1.2) より $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する. この方程式は, 非線形性を持つ移流 $(f(u))_x$, 分散 u_{xxx}, 及び拡散 u_{xx} の三つの効果を考慮した非線形波の方程式の一つである. 数学の分野において, この方程式は, 基本的な非線形波の方程式である Burgers 方程式と KdV 方程式を組み合わせ, 移流項を一般化したものであることから, 一般化された KdV-Burgers 方程式と呼ばれている. この方程式の数学解析により, 波動現象を理論的に説明することが可能となる. しかし一般に, 与えられた偏微分方程式の解を具体的に書き表すことは非常に困難である. そこで, 解の形状の時間変化を調べる上で, 十分時間が経過した時に, 与えられた条件で解がどのように振る舞うのか, その長時間挙動 (漸近挙動) を解析することが重要となる. 本講演では, 初期値問題 (1.1) の時間大域解について, 解の時間無限大における漸近形と, その漸近形への漸近レート (漸近形への収束の速さ) や, 解の第 2 漸近形 (時間無限大における漸近展開の第 2 項目) について考える. 特に, 初期値 $u_0(x)$ が (1.2) のように空間遠方で多項式減衰している場合に, その減衰度合いの違いや, 移流と分散の効果が解の漸近挙動にどのような影響を与えるのかについて考察する.

2 既知の結果

まず, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動について, 関連する先行結果を紹介する.

一般化された Burgers 方程式について ($k = 0$)

初期値問題 (1.1) で $k = 0$ とした以下の方程式は, 一般化された Burgers 方程式と呼ばれている:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= u_{xx}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

この問題については, Kawashima [4] 等の研究で, 単独の方程式だけでなく方程式系の場合も含めて, 時間大域解の存在や解の漸近挙動に関する考察がなされている. また, 単独方程式については $c = 0$ の場合に Liu [7] 等でより詳しい解析が行なわれている. 具体的には, 解は非線形散逸波と呼ばれる以下の関数 $\chi(x,t)$ に漸近することが知られている.

---

e-mail: i.fukuda@math.sci.hokudai.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 35B40; Secondary 35Q53.

$$\chi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t}}\chi_*\biggl(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\biggr), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b}\frac{(e^{b\delta/2}-1)e^{-x^2/4}}{\sqrt{\pi}+(e^{b\delta/2}-1)\int_{x/2}^{\infty} e^{-y^2}dy}, \quad \delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \quad b \neq 0.$$

ここで, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ は Burgers 方程式

$$\chi_t + \left(\frac{b}{2}\chi^2\right)_x = \chi_{xx}, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(x,0)dx = \delta$$

の解である. 更に Matsumura & Nishihara [8] は, 初期値問題 (2.1) の解 $u(x,t)$ の非線形散逸波への漸近に関して,

$$w_0(x) \equiv \exp\biggl(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x} u_0(y)dy\biggr) - \exp\biggl(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x} \chi(y,0)dy\biggr)$$

とおき, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいという仮定のもとで次の評価を導いた:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

この時間減衰評価 (2.3) の最適性について, Kato [5] によって, $\delta \neq 0$, $c \neq 0$, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1}$ が十分小さいときに, この評価が最適であることが示された. ここで,

$$L^1_1(\mathbb{R}) \equiv \left\{ u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \middle| \ \|u_0\|_{L^1_1} \equiv \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|(1+|x|)dx < \infty \right\}$$

とした. (なお, 初期値 $u_0(x)$ に対する仮定 (1.2) と $w_0(x)$ 等の定義から直接計算することにより, $\alpha > 2$ かつ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ であれば, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ や $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ が実現されることに注意する.) 実際, 解の第 2 漸近形 $V_1(x,t)$ とその第 2 漸近形への漸近に関する評価が以下で与えられる:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V_1(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1. \tag{2.4}$$

ここで, $V_1(x,t)$ は次で定められた関数である :

$$\begin{aligned} V_1(x,t) &\equiv -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}}V_*\biggl(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\biggr)(1+t)^{-1}\log(1+t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ V_*(x) &\equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-x^2/4}\eta_*(x) = 2\frac{d}{dx}(\eta_*(x)e^{-x^2/4}), \\ \eta_*(x) &\equiv \exp\biggl(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x} \chi_*(y)dy\biggr), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}} (\eta_*(y))^{-1}(\chi_*(y))^3 dy. \end{aligned} \tag{2.5}$$

この評価 (2.4), $V_1(x,t)$ の定義及び三角不等式を用いることで, $\delta \neq 0$ かつ $c \neq 0$ のもとで, 十分大きい $t > 0$ に対して以下のような評価が得られる.

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \leq \|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}\log(1+t). \tag{2.6}$$

すなわち解 $u(x,t)$ が非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近することがわかり, さらに $u-\chi$ は $V_1(x,t)$ へ t^{-1} のレートで漸近することがわかった. このような $u-\chi$ の漸近形は解の第 2 漸近形と呼ばれる. (解の時間無限大での漸近展開において, $\chi(x,t)$ が主要項に, $V_1(x,t)$ が第 2 項目に対応する.)

KdV-Burgers 方程式について ($b = k = 1$, $c = 0$)

一方, 初期値問題 (1.1) で $b = k = 1$, $c = 0$ とした KdV-Burgers 方程式

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + u_{xxx} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{2.7}$$

の解の漸近挙動についても, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ への漸近とその漸近レートに関する結果が Karch [4] や Hayashi & Naumkin [2] 等により得られている. 更に, 非線形散逸波への漸近レートの最適性に関する解析や, 解の第 2 漸近形の

構成についても, Kato [5] と類似の結果が得られている. 具体的には, Kaikina & Ruiz-Paredes [3] により, $s > -1/2$ として, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ のときに, 次の評価が導かれた:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot, t-1) - V_2(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-1}\sqrt{\log t}, \quad t > 1. \tag{2.8}$$

ここで,

$$V_2(x,t) \equiv -\frac{d}{32\sqrt{\pi}} V_*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) t^{-1}\log t$$

であり, $V_*(x)$ 及び d は (2.5) で定義された関数である. この結果によって, KdV-Burgers 方程式の初期値問題 (2.7) の場合であっても, (2.6) と同様の評価が導けるため, 解 $u(x,t)$ は非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近し, このレートが最適であることがわかる. しかし第 2 漸近形 $V_2(x,t)$ への漸近レートに関しては, 一般化された Burgers 方程式のときの Kato の結果 (2.4) と比べると, (2.8) は $\sqrt{\log t}$ 分粗い評価となっている. Kaikina と Ruiz-Paredes は彼らの論文 [3] の中で, この $\sqrt{\log t}$ は, より繊細な計算によって取り除けると述べているが, 証明はされていない.

一般化された KdV-Burgers 方程式について (一般の初期値問題 (1.1))

上記の背景のもとに, F. [1] は任意の $b, c, k \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動に関する研究を行い, 解の第 2 漸近形を構成し, 評価 (2.4) に類似の, (2.8) を改良した次の結果を得た:

定理 1 ([1] の Theorem 1.1)**.** $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. このとき初期値問題 (1.1) は, $u \in C^0([0,\infty); H^3)$ かつ $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^3)$ を満たす唯一の時間大域解 $u(x,t)$ を持つ. さらに $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3}$ が十分小さいとすると, 以下の評価が成り立つ:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{2.9}$$

ここで, $\chi(x,t)$ は (2.2) で定義された非線形散逸波であり, $V(x,t)$ は次で定められた関数である:

$$V(x,t) \equiv -\frac{d}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{b^2k}{8} + \frac{c}{3}\right) V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(1+t), \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

この評価 (2.9) と $V(x,t)$ の定義及び三角不等式より, $\delta \neq 0$ かつ $(b^2k)/8 + c/3 \neq 0$ であれば, 十分大きい $t > 0$ に対して, (2.6) と同様の次の評価が成り立つ:

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t). \tag{2.11}$$

なお, $(b^2k)/8 + c/3 = 0$ の時には $V(x,t)$ が恒等的にゼロとなるので, (2.9) より

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1$$

が成り立ち, 非線形散逸波への漸近レートとして, log 項を取り除いた t^{-1} が得られることに注意する.

3 研究の主結果

上記で紹介した [1], [3], [5] 等の先行結果では, 全体を通して, 初期値が $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R})$ と仮定しており, 仮定 (1.2) において $\alpha > 2$ という部分に対応する研究が行なわれていた. そこで本研究では, 初期値がより緩やかに多項式減衰する $1 < \alpha \le 2$ の場合の解の漸近挙動に関する考察を行い, 対応する解の第 2 漸近形を具体的に構成することによって, 非線形散逸波への漸近について, 以下の結果を得ることができた:

定理 2 (F., In Preparation)**.** 初期値 $u_0(x)$ に対して (1.2) を仮定し, $1 < \alpha \le 2$ とする. また, $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. 更に $\Psi_0(x) \equiv \eta_*(x)^{-1}\int_{-\infty}^x (u_0(y) - \chi_*(y))dy$ とおき, $\lim_{|x|\to\infty}(1+|x|)^{\alpha-1}\Psi_0(x) = C_\alpha (\neq 0)$ であるとする. この時, 初期値問題 (1.1) の解に対して次が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\alpha/2}\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \tag{3.1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+t)}{\log(1+t)}\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad \alpha = 2. \tag{3.2}$$

ここで, $\Psi(x,t)$ は次で定義された関数である：

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &\equiv C_\alpha \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t)\eta(x,t))(1+|y|)^{-(\alpha-1)}dy,\\ \eta(x,t) &\equiv \eta_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

この結果により, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動について, 初期値の減衰度合いが弱い $1<\alpha<2$ の場合には, 定理 1 の場合とは異なった解の第 2 漸近形 $\Psi(x,t)$ と, その漸近レートが与えられることがわかった. また, $\alpha=2$ の場合には, 定理 1 における (2.10) の $V(x,t)$ と $\Psi(x,t)$ を組み合わせた $\Psi(x,t)+V(x,t)$ が第 2 漸近形となる. これらの第 2 漸近形については, (3.3) の表示を用いて直接評価することで, $1<\alpha<2$ かつ $C_\alpha \neq 0$ ならば

$$\tilde{C}(1+t)^{-\alpha/2} \le \|\Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2} \tag{3.4}$$

が成り立ち, この評価 (3.4) と (3.1) と三角不等式を組み合わせれば, 十分大きな $t>0$ に対して

$$\tilde{C}(1+t)^{-\alpha/2} \le \|u(\cdot,t)-\chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2} \tag{3.5}$$

が得られる. 一方 $\alpha=2$ に対しては, (2.10) と (3.3) を用いて評価すると, $C_2 \neq d((b^2k)/8+c/3)$ の場合に, 十分大きな $t>0$ に対して

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|\Psi(\cdot,t)+V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t) \tag{3.6}$$

を示すことができ, (3.2) と三角不等式を用いれば十分大きな $t>0$ では,

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|u(\cdot,t)-\chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t) \tag{3.7}$$

が得られる (これらの評価 (3.4) と (3.6) の具体的な導出方法については講演の中で紹介する). $\alpha>2$ の場合における評価 (2.11), $\alpha=2$ の時の (3.7), 及び $1<\alpha<2$ での (3.5) をまとめると, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ の非線形散逸波への漸近レートは, 初期値の減衰度合いの違いにより, $\alpha \ge 2$ と $1<\alpha<2$ で大きく変化することが確認できる. 特に $1<\alpha<2$ の場合には, 初期値の減衰率 α が漸近レートに色濃く反映されていることがわかる.

4 主定理の証明の方針

最後に, 定理 2 の証明の方針とその考え方について紹介する. まず, $\psi(x,t) \equiv u(x,t)-\chi(x,t)$ とおく. すると, $u(x,t)$ と $\chi(x,t)$ の満たす方程式から, 摂動 $\psi(x,t)$ が次の方程式を満たすことがわかる:

$$\begin{gathered}\psi_t+(b\chi\psi)_x-\psi_{xx} = -\left(\frac{b}{2}\psi^2\right)_x - \left(\frac{c}{3}u^3\right)_x - ku_{xxx},\\ \psi_0(x)=u_0(x)-\chi(x,0).\end{gathered} \tag{4.1}$$

この摂動方程式 (4.1) を解析するために, 次の予備問題を考える:

$$\begin{gathered}z_t+(b\chi z)_x - z_{xx} = \partial_x\lambda(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R},\\ z(x,0)=z_0(x), \quad x\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

ここで, $\lambda(x,t)$ は十分なめらかなで, 空間遠方で減衰する既知の関数とする. この方程式については, Burgers 型の方程式に特有の Hopf-Cole 変換に類似した変換を用いることで, 方程式を熱方程式に書き換えることができ, 解の具体的な表示を得られることが知られている. 実際,

$$U[h](x,t,s) \equiv \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta(x,t))\eta(y,s)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{y} h(\xi)d\xi\right)dy \tag{4.3}$$

と定めれば, 次が成り立つ (証明は [1], [5] を参照):

補題 1. 初期値問題 (4.2) の解 $z(x,t)$ は次で与えられる.

$$z(x,t)=U[z_0](x,t,0)+\int_0^t U[\partial_x\lambda(s)](x,t,s)ds, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

摂動方程式 (4.1) に対して補題 1 を用いれば, $\psi = u - \chi$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} u - \chi &= U[\psi_0](x,t,0) - \frac{b}{2}\int_0^t U[\partial_x \psi^2(s)](x,t,s)ds \\ &\quad - \frac{c}{3}\int_0^t U[\partial_x u^3(s)](x,t,s)ds - k\int_0^t U[\partial_x^3 u(s)](x,t,s)ds \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

ここで, I_1 から I_4 に対して, 解 $u(x,t)$ の時間減衰評価 ([1] の Lemma 2.3):

$$\begin{aligned} \|\partial_x^l u(\cdot,t)\|_{L^1} &\le Ct^{-l/2}(1+t^{-1/4}), \quad t>0, \quad l=0,1,2,3, \\ \|\partial_x^l u(\cdot,t)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-1/4-l/2}, \quad t \ge 0, \quad l=0,1,2,3, \end{aligned}$$

及び非線形散逸波 $\chi(x,t)$ と熱核 $G(x,t)$ の時間減衰評価:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^l \chi(\cdot,t)\|_{L^p} &\le C(1+t)^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad t \ge 0, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \\ \|\partial_x^l G(\cdot,t)\|_{L^p} &\le Ct^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad t>0, \quad l \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

(証明は [5], [8] 等を参照) を適用すると, α の減衰度合いが弱い $1 < \alpha < 2$ の時には摂動項の I_2, I_3, I_4 の方が初期値部分の I_1 よりも時間減衰が早いことがわかり, $\alpha = 2$ の時には両者の減衰オーダーが一致していることが示せる (詳しい評価については, 講演の中で紹介する). このことから, 初期値の減衰の弱い場合には, $u - \chi$ の主要部は I_1 によって決定されることが予想され, 解の第 2 漸近形は初期値部分である I_1 から導かれると考えられる. 実際, この I_1 については (4.3) により具体的な表示が与えられているので, 緩やかに減衰する初期値を持つ半線形熱方程式の解析に用いられた Narazaki & Nishihara [9] の手法を応用することで, 次の漸近公式を示すことができる:

補題 2. $U[\psi_0](x,t,0)$ と (3.3) で定義された $\Psi(x,t)$ について, 次の公式が成り立つ*:*

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\alpha/2}\|U[\psi_0](\cdot,t,0) - \Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad 1<\alpha<2, \tag{4.5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+t)}{\log(1+t)}\|U[\psi_0](\cdot,t,0) - \Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad \alpha = 2. \tag{4.6}$$

これらの漸近公式と I_2, I_3, I_4 の時間減衰評価を組み合わせることで, (3.1) と (3.2) が導かれる.

5 謝辞

本研究は, 北海道大学博士課程教育リーディングプログラム「物質科学フロンティアを開拓する Ambitious リーダー育成プログラム」による支援を受けたものである.

参考文献

[1] I. Fukuda, *Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation*, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, **1105** (2017), 1-20.

[2] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **22** (2006), 1441-1456.

[3] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes, *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math, **42** (2005), 407-420.

[4] G. Karch, *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Analysis, **35** (1999), 199-219.

[5] M. Kato, *Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations*, Osaka J. Math, **44** (2007), 923-943.

[6] S. Kawashima, *Large-time behavior of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **106** (1987), 169-194.

[7] T.-P. Liu, *Hyperbolic and viscous conservation laws*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **72**, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[8] 松村昭孝, 西原健二, 非線形微分方程式の大域解-圧縮性粘性流の数学解析-, 日本評論社, 2004.

[9] T. Narazaki and K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 803-819.