ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形空間について

長岡 高広 (Nagaoka Takahiro)*

京都大学大学院数学・数理解析専攻数学系 修士二年

1 導入

ハイパートーリック多様体はトーリック多様体のハイパーケーラー類似として Bielawski-Dancer によって導入された ([BD]). トーリック多様体の大きな特徴として凸多面体など組合せ論的な対象との対応が知られている. このようなトーリック多様体の類似物として導入されたハイパートーリック多様体の大きな特徴としては, 超平面配置という組合せ論的対象との対応が知られていることである. 元々 Bielawski-Dancer は微分幾何的な方法 (ハイパーケーラー商) を用いてハイパートーリック多様体 (toric hyperkahler variety と呼ばれていた) を定義した. 一方で「代数的シンプレクティック商」という代数幾何的な構成 (GIT 商) で, 正則シンプレクティック構造を持つ代数多様体として定義することも可能である (3 節参照). この観点ではハイパートーリック多様体はシンプレクティック (代数) 多様体というクラスに属する (2 節参照). これは冪零軌道閉包や箙多様体などの重要なクラスを含んでいる.

シンプレクティック代数多様体はシンプレクティック構造を持つが, その条件を弱めたポアソン構造も持つ. そこでシンプレクティック代数多様体のポアソン構造の変形を考え, その中でもある種の普遍性を満たす「普遍ポアソン変形空間」というものを考えることができる. 普遍ポアソン変形空間は常に存在するとは限らないが, 錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y(0), \bar{\omega}_0)$ というクラスに対しては, 一般的に Namikawa によって以下が成立することが知られている.

定理 1.1. (Namikawa [Na3])
錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y(0), \bar{\omega}_0)$ について $Y, Y(0)$ それぞれの普遍ポアソン変形空間 $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}(0)$ が存在し錐的 $\mathbb{C}^*$-作用と可換な次の図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y(0) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathcal{Y} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & \mathcal{Y}(0) \arrow[dd, "\bar{\mu}_W"] & \\
 & 0 \arrow[rr, mapsto] & & \bar{0} \\
H^2(Y, \mathbb{C}) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[ur, phantom, "\ni" sloped] & & H^2(Y, \mathbb{C})/W \arrow[ur, phantom, "\ni" sloped] &
\end{tikzcd}$$

ただし $W \subseteq GL(H^2(Y, \mathbb{C}))$ は Namikawa-Weyl 群と呼ばれる有限群である.

注意. Brieskorn, Grothendiek, Slodowy らは単純特異点の半普遍変形空間の同時特異点解消を研究した ([Slo]). 上の定理はその一般化になっている.

* tnagaoka@math.kyoto-u.ac.jp

この定理は錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消の普遍ポアソン変形の存在性を主張している重要な定理である．一方で普遍ポアソン変形を具体的に構成することは一般には難しい．筆者はハイパートーリック多様体の場合にこれらの普遍ポアソン変形空間及び Namikawa-Weyl 群を具体的に決定した (定理 5.3 を参照).

本稿の構成を述べる．まず第 2 節でシンプレクティック代数多様体や普遍ポアソン変形を定義する．そして代数的シンプレクティック商を定義し代数的シンプレクティック商に対して, 与えられたポアソン変形がいつ普遍的となるかについての判定法を証明する．第 3 節ではトーラスによる代数的シンプレクティック商としてハイパートーリック多様体を定義する．第 4 節で非特異ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形空間が Lawrence トーリック多様体と呼ばれるものになることを示す．そして第 5 節で Namikawa-Weyl 群の候補である有限群 W_B 及び W_B のアファイン Lawrence トーリック多様体への作用を定義してアファインハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形を決定する．

2　シンプレティック代数多様体とポアソン変形理論

定義. (シンプレクティック代数多様体)
正規代数多様体 Y が**シンプレクティック代数多様体**であるとは, 非特異点集合 X_{reg} 上に, ある正則シンプレクティック形式 $\bar{\omega}_0 \in \Gamma(Y, \Omega^1_{Y_{reg}})$ が存在し以下の条件を満たすときを言う:
Y のある特異点解消 $\pi : \tilde{Y} \to Y$ (i.e., $\tilde{Y}$ は smooth で π は $\pi^{-1}(Y_{reg}) \cong Y_{reg}$ となる全射固有双有理射) で $\pi^*\bar{\omega}_0$ が $\tilde{Y}$ 上のある正則 2 形式 ω_0 に拡張する．

なお特にこの拡張された正則 2 形式 ω_0 がシンプレクティック形式であるときこの特異点解消を**シンプレクティック特異点解消**と呼ぶ.

注意. 今の場合, シンプレクティック特異点解消であることとクレパント解消であることは同値である.

シンプレクティック代数多様体 Y は自然にポアソン構造という, 構造層 $\mathcal{O}_Y$ 上の演算 $\{-,-\}$ で Lie 括弧積と同じ公理を満たす構造を持つ．またポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ に対し, それのポアソン変形とはポアソン代数多様体 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ 及び射 $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to (S, 0)$ (ただし $0 \in S$) であってポアソン構造も含めて $(Y, \{-,-\}_0) = (\bar{\mu}^{-1}(0), \{-,-\}|)$ となっているときを言う．厳密な定義は述べないが, Y のポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ が普遍ポアソン変形であるとは任意の (Y の) ポアソン変形がすべて $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ から (引き戻しとして) 得られるときを言う．与えられたポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ が普遍ポアソン変形かどうか判定するために重要なものとして, 次の小平-スペンサー写像がある (紙数の都合上直観的に定義する)．なお以下で $PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon])$ を Y の“無限小”ポアソン変形全体と定める (厳密には $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon]$ 上の Y のポアソン変形全体).

定義. (小平-スペンサー写像)
ポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ について, Y のポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$, $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to S$ が与えられたとする．このとき $\mathcal{Y}$ についての**小平-スペンサー写像** $KS_{\mathcal{Y}} : T_0S \to PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon])$ を接ベクトル $\eta \in T_0S$ に対し $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ を η 方向に制限した無限小ポアソン変形を対応させる射として定義する.

小平-スペンサー写像を用いると普遍性は次のように判定できる.

定理 2.1. ポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ に対しその普遍ポアソン変形空間が存在するとする．Y の無限小ポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ に対し, それが普遍ポアソン変形であることと小平-スペンサー写像 $KS_{\mathcal{Y}}$ が全単射

であることは同値である.

紙面の都合上詳しく述べないが以下で主に考えたいのは, 錐的シンプレクティック多様体という, “良い $\mathbb{C}^\times$-作用”を持つアファインシンプレクティック代数多様体である ([Na3] 参照).

特に以下では錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消の重要なクラスの一つとしてアファイン代数的シンプレクティック商及び代数的シンプレクティック商を導入する.

まずいくつか注意をする. 簡約代数群 G 及びその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, $Z(\mathfrak{g}^*) := \left\{\xi \in \mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}_g^*(\xi) = \xi \ (g \in G)\right\}$ と定める. すると簡約代数群ということより単射 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times) \hookrightarrow Z(\mathfrak{g}^*)$ が射の微分をするという操作で得られ, この像を $Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ と書く. この時 $Z(\mathfrak{g}^*) = Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ となることに注意する.

次に GIT 商の用語について少し述べる. G が代数多様体 X に作用しているとき $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times)$ (GIT パラメーターと呼ぶ) を取ると, 一般的に安定集合 $X^{\alpha-st}$, 半安定集合 $X^{\alpha-ss}$ という X の開集合が $X^{\alpha-st} \subseteq X^{\alpha-ss} \subseteq X$ となるように定まる. そして $X^{\alpha-ss}//G$ は半安定集合の圏論的商 (categorical quotient) と定める. この上で以下のように定義する.

定義 & 補題 2.2. (代数的シンプレクティック商)
$\mathbb{E}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間, G を簡約代数群, $G \to GL(\mathbb{E})$ を G の $\mathbb{E}$ 表現とする. この表現から自然に定まる G の $(T^*\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^*, \omega_{\mathbb{C}})$ への作用はハミルトニアン作用となり, 次の射がモーメント写像となる.

$$\mu : \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^* \to \mathfrak{g}^* \quad \mu(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})(X) := \boldsymbol{w}(X \cdot \boldsymbol{z})$$

ただし $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{E}$ への作用は G の微分表現 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$ から決まるものである. この時 GIT パラメーター $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ に対し

(1) $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))$ の GIT 商)

$$X(\alpha) := \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))//_\alpha G := (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss}//G$$
$$X(0) := \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))//G := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))]^G$$

とおく. これらは $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)), \omega_{\mathbb{C}})$ から自然に誘導されるポアソン構造を持つポアソン代数多様体となる. また包含写像 $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss} \hookrightarrow \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))$ が誘導する自然な (ポアソン構造を保つ) 射影射を $\Pi : X(\alpha) \to X(0)$ と定める.

(2) (代数的シンプレクティック商)
各 $\xi \in Z(\mathfrak{g}^*)$ に対し

$$Y(\alpha, \xi) := \mu^{-1}(\xi)//_\alpha G := (\mu^{-1}(\xi))^{\alpha-ss}//G$$
$$Y(0, \xi) := \mu^{-1}(\xi)//G := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mu^{-1}(\xi)]^G$$

をそれぞれ**代数的シンプレクティック商**, **アファイン代数的シンプレクティック商**と呼ぶ (ただし $\mathbb{C}[\mu^{-1}(\xi)]$ は $\mu^{-1}(\xi)$ の座標環である). これらは $(T^*\mathbb{E}, \omega_{\mathbb{C}})$ から自然に誘導されるシンプレクティック構造 $(Y(\alpha, \xi), \omega_\xi)$, $(Y(0, \xi), \bar{\omega}_\xi)$ を持つ. また包含写像 $(\mu^{-1}(\xi))^{\alpha-ss} \hookrightarrow \mu^{-1}(\xi)$ が誘導する自然な (シンプレクティック構造を保つ) 射影射を $\pi_\xi : Y(\alpha, \xi) \to Y(0, \xi)$ と定める. なお以下では $Y(\alpha) := Y(\alpha, 0)$, $Y(0) := Y(0, 0)$ と書くことにする.

(3) (錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用)
$T^*\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^*$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用をスカラー倍 $t \cdot (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) := (t\boldsymbol{z}, t\boldsymbol{w})$ で定める. この作用は G-作用と

可換で (半) 安定的集合を保つため $X(\alpha),\ X(0),\ Y(\alpha),\ Y(0)$ への作用及び $Z(\mathfrak{g}^*)$ への作用が誘導される ($Z(\mathfrak{g}^*)$ への作用は $t \in \mathbb{C}^\times$ に対し t^2 を掛ける作用). 特に以下の可換図式は $\mathbb{C}^\times$-同変となる.

$$\begin{tikzcd}
& Y(\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y(0) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X(\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni"] & & 0 \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
Z(\mathfrak{g}^*) \arrow[rr, equal] & & Z(\mathfrak{g}^*) &
\end{tikzcd}$$

またこの作用で $(Y(0), \bar{\omega}_0)$ は錐的シンプレクティック多様体となる.

今後, 代数的シンプレクティック商を考えるときは以下を仮定して話を進める.

仮定 2.3. $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ で次を満たすような元が存在する.

(i) α は generic (i.e., $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss} = (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}$)
(ii) G は $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}$ に自由に作用する.
(iii) $\mu|_{(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}} : (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st} \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は全射.

注意. (1) (iii) を満たすときモーメント写像の性質と安定集合の定義から $\mu|_{(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}} : (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st} \to Z(\mathfrak{g}^*)$ はスムース射 (複素多様体としての位相で沈めこみ射) となる.
(2) (i), (ii) から (厳密には述べないが) "多くの場合" $\Pi : X(\alpha) \to X(0)$ は特異点解消となり, さらに各 $\xi \in Z(\mathfrak{g}^*)$ に対し $\pi_\xi : Y(\alpha, \xi) \to Y(0, \xi)$ はシンプレクティック特異点解消を与える.

さてこうして上の仮定を満たすとき, $\pi : Y(\alpha) \to Y(0)$ は定理 1.1 の状況を満たしていることが分かった. また上の図式で $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$, $\bar{\mu} : X(0) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ はそれぞれ $(Y(\alpha), \omega_0)$, $(Y(0), \bar{\omega}_0)$ のポアソン変形を与えている. これらが普遍ポアソン変形の候補となっている. さてまず $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が普遍ポアソン変形となるかどうか考えるため小平-スペンサー写像をより分かりやすい写像で置き換えることを考える. まず上で述べたことから以下が分かる.

補題 2.4. 上の状況で仮定 2.3 を満たしているとする. アファイン多様体 $X(0)$ のアファイン空間への埋め込みを $X(0) \subseteq \mathbb{C}^N$ と書く (定義から $\mathbb{C}^N$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用が決まりこれは同変な埋め込みとなる). この時以下の $\mathbb{C}^\times$-同変な図式は次の性質を満たす.

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\bar{\mu}"] & X(0) \subseteq \mathbb{C}^N \\
Z(\mathfrak{g}^*) &
\end{tikzcd}$$

(1) $\mathbb{C}^N,\ Z(\mathfrak{g}^*)$ への $\mathbb{C}^\times$-作用は線形に正の重みで作用 (i.e., ウェイトが全て正)
(2) $\Pi : \mathbb{C}^\times$-同変全射固有射
(3) $\bar{\mu} : \mathbb{C}^\times$-同変スムース射
(4) $\phi \neq \pi^{-1}(0) \subsetneq \bar{\mu}^{-1}(0)$

さてこの補題で明示した条件を用いると (複素多様体としての位相で考えれば) 次の一般的な定理より $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は自明 C^∞ 級ファイバー束であることが従う.

定理 2.5. (essentially Slodowy [Slo])
$\mathcal{Y}$ を一般の C^∞ 級多様体, S は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし $\pi : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}^N$ は C^∞ 級の写像としてその像を $\tilde{\mathcal{Y}}(0)$ と書く. また $\mathcal{Y}, \mathbb{C}^N, S$ に $\mathbb{C}^\times$ が作用し, C^∞ 級写像 $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to S$ が次の性質を満たしているとする.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{Y}}(0) \subseteq \mathbb{C}^N \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \\ S & & \end{array}$$

(1) $\mathbb{C}^N, S$ には線形に正の重みで作用している
(2) $\pi : \mathbb{C}^\times$-同変全射固有 C^∞-写像
(3) $\bar{\mu} : \mathbb{C}^\times$-同変沈めこみ C^∞-写像
(4) $\phi \neq \pi^{-1}(0) \subsetneq \bar{\mu}^{-1}(0)$

このとき $\bar{\mu}$ は C^∞-自明ファイバー束

さて今 $X(\alpha)$ のポアソン構造は $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ の各ファイバー $(Y(\alpha,\xi),\omega_\xi)$ に非特異シンプレクティック代数多様体 (特に正則シンプレクティック多様体) の構造を誘導していた. このようなとき ω_ξ たちから $X(\alpha)$ 上の正則 2 形式 $\omega_{X(\alpha)}$ が決まるため, $X(\alpha)$ は $\bar{\mu}$ について相対的にシンプレクティックと呼ぶ. すると今 $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が C^∞-自明ファイバー束だったことから $X(\alpha)$ についての周期写像が定義できる.

定義. (周期写像)
相対的正則シンプレクティック多様体 $(\mathcal{Y}, \omega_\mathcal{Y}, \bar{\mu})$ が S 上の C^∞ 級自明ファイバー束とする. C^∞ 級自明化 $\Phi : Y \times S \to \mathcal{Y}$ を取り Φ による $\omega_\mathcal{Y}$ の引き戻しを $\lambda := \Phi^*\omega_\mathcal{Y}$ と定める. このとき $\mathcal{Y}$ の**周期写像**を

$$p_\mathcal{Y} : S \longrightarrow H^2(Y;\mathbb{C}) \ : \ \xi \longmapsto [\lambda|_{Y\times\{\xi\}}]$$

という滑らかな写像として定める.

注意. 周期写像は正則写像であることが知られている.

さて周期写像と小平-スペンサー写像を比較するため, 一般的にシンプレクティック代数多様体 Y に対し $PD_Y(\mathbb{C}[\varepsilon])$ が $H^2(Y;\mathbb{C})$ と同一視されることに注意する.

命題 2.6. (Namikawa [Na1]) $PD_Y(\mathbb{C}[\varepsilon]) \cong H^2(Y;\mathbb{C})$

この命題から小平-スペンサー写像は $KS_\mathcal{Y} : T_0S \to PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon]) \cong H^2(Y;\mathbb{C})$ という写像だと思うことができ, 以下が成立する.

命題 2.7. (小平-スペンサー写像と周期写像の関係)
上の命題の同型で小平スペンサー写像を $KS_\mathcal{Y} : T_0S \to H^2(Y;\mathbb{C})$ とみなした時,

$$KS_\mathcal{Y} = (dp_\mathcal{Y})_0$$

が成立する. ただし右辺は周期写像の 0 における微分 $(dp_\mathcal{Y})_0 : T_0S \to T_{p_\mathcal{Y}(0)}H^2(Y,\mathbb{C}) = H^2(Y,\mathbb{C})$ である.

この定理から周期写像の微分が同型かどうかを見ることで普遍性を判定できることになった.

さらに周期写像は Kirwan 写像と呼ばれる線形写像と等しいことを示す. 定義から同型 $Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G,\mathbb{C}^\times)$ 及び $Z(\mathfrak{g}^*) = Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ に注意して以下のように Kirwan 写像を定義する.

定義. (Kirwan 写像)
仮定 2.3 を満たす代数的シンプレクティック商 $Y(\alpha)$ について, その **Kirwan 写像** $\kappa_Y^2 := \kappa_{\mathbb{Z},Y}^2 \otimes \mathbb{C} \ : Z(\mathfrak{g}^*) \to H^2(Y,\mathbb{Z})$ を合成射

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_{\mathbb{Z},Y}^2 : Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G,\mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^2(Y,\mathbb{C}) \\ \uplus & & \uplus & & \uplus \\ \xi := (d\rho)_1 & \longleftarrow & \rho & \longmapsto & c_1(L_\rho) \end{array}$$

の複素化として定義する．ただし L_ρ は ρ が定める $Y(\alpha)$ 上の随伴直線束 $L_\rho := (\mu^{-1}(0))^{\alpha-st} \times_G \mathbb{C} \to Y(\alpha)$ とする．

実シンプレクティック幾何学で良く知られた Duistermaat-Heckman の定理の類似を, 正則シンプレティック多様体の場合に示すことによって以下を得る．

定理 2.8. (代数的シンプレクティック商の周期写像と Kirwan 写像の関係)
仮定 2.3 を満たす代数的シンプレクティック商 $Y(\alpha)$ に対し以下が成立する．

$$p_{X(\alpha)} = 2\pi\sqrt{-1}\kappa^2_{Y(\alpha)}$$

特に以下は同値である．

(i) $\kappa^2_{Y(\alpha)}$ は同型写像
(ii) $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は $(Y(\alpha), \omega_0)$ の普遍ポアソン変形空間である．

注意. 上で Kirwan 写像が線形写像であることより, Kirwan 写像の同型性と Kirwan 写像の微分の同型性が同値であることを用いた．

第 4 節でハイパートーリック多様体の場合にこの定理と Kirwan 写像についての既知の結果を用いることで $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が $Y(\alpha)$ の普遍ポアソン変形空間となる必要十分条件を求める．

本節の残りではアファイン代数的シンプレクティック商 $Y(0)$ を含め, 一般の錐的シンプレクティック多様体の普遍ポアソン変形について述べる．主な目的は Namikawa の定理 1.1 に現れた Namikawa-Weyl 群を [Na2] に則て定義することである．まず定義に必要な事実を述べる．

定理 2.9. (Kaledin [Kal])
$Y(0)$ を錐的シンプレクティック多様体とすると $Y(0)_{\mathrm{Sing}}$ は, 局所閉で非特異なシンプレクティック部分代数多様体たち $\{Y(0)_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ による分割を持つ．すなわち

$$Y(0)_{\mathrm{Sing}} = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} Y(0)_\gamma$$

この分解で各 $Y(0)_\gamma$ はシンプレクティック代数多様体のため偶数次元になっていることに注意する．特に以下では余次元 2 の特異点集合を考察する．

補題 2.10. ([Na2])
$Y(0)$ を m 次元の錐的シンプレクティック多様体, $\pi : Y \to Y(0)$ をシンプレクティック特異点解消とする．

$$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} := Y(0)_{\mathrm{Sing}} - \bigsqcup_{\gamma:\mathrm{codim}\,Y(0)_\gamma \geq 4} Y(0)_\gamma$$

と定め, これの連結成分への分解を $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_k \Sigma^{(k)}$ と置く．この時各 k に対しある $\ell_k \geq 1$ が存在し, $\Sigma^{(k)}$ の各点 y の周りで

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\text{locally iso}} & \tilde{S}_{\ell_k} \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p\times id} \\ (Y(0), y) & \xrightarrow{\text{locally iso}} & (S_{\ell_k}, 0) \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0) \end{array}$$

となる．ただし S_{ℓ_k} は ADE 型曲面特異点で $\tilde{S}_{\ell_k}$ はそれの最小特異点解消である (ここで ℓ_k は例外因子の既約成分の個数である).

各 $\Sigma^{(k)}$ について上のような S_{ℓ_k} を $\Sigma^{(k)}$ のスライスと呼ぶことにする．Namikawa-Weyl 群はこのスライスたちを用いて定義される．しかし後で考えるハイパートーリック多様体の場合は上の定理でとったスライス $S^{(k)}$ は A 型の場合しか現れないため, 以下ではこの場合のみ Namikawa-Weyl 群を定義する (一般的な定義は [Na2] を参照)．さてスライス S_{ℓ_k} は A_{ℓ_k-1} 型曲面特異点であるが, このとき $\tilde{S}_{\ell_k}$ 内に現れる (-2)-曲線を C_i $(1 \leq i \leq \ell_k)$ と置くと

$$\Phi := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \;\middle|\; d_i \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \left(\sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \right)^2 = -2 \right\} \subset H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$$

は $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ 内の A_{ℓ_k-1} 型のルート系を定めている．特に対応する Weyl 群 $W_{A_{\ell_k-1}} := \mathfrak{S}_{\ell_k}$ が $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ に作用している．しかし $\Sigma^{(k)}$ の上にある例外因子 $\pi^{-1}(\Sigma^{(k)})$ の既約成分は ℓ_k 個より少なくなっていることがある．より正確には交叉数の不変性を考慮すると Dynkin 図形の位数 2 のグラフ自己同型 ι (今の場合 A 型なのでグラフの中心で左右を入れ替える同型) で貼り合う箇所に対応する (-2)-曲線が大域的には張り合わさって既約成分が $\lfloor (\ell_k+1)/2 \rfloor$ 個になり得る (ただし $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す)．いずれにしろ既約成分の個数を r と置くとき $W_{\Sigma^{(k)}}$ を

$$W_{\Sigma^{(k)}} := \begin{cases} W_{A_{\ell_k}} & (r = \ell_k) \\ \{\sigma \in W_{A_{\ell_k}} \mid \sigma\iota = \iota\sigma\} & (r = \lfloor (\ell_k+1)/2 \rfloor) \end{cases}$$

と定義すれば, $\Sigma^{(k)}$ の上の例外因子の既約成分のコホモロジー類の置換として $H^2(Y, \mathbb{R})$ に作用する．このとき Namikawa-Weyl 群を $W := \prod_k W_{\Sigma^{(k)}}$ と定義する．

3 ハイパートーリック多様体とローレンストーリック多様体

代数的シンプレクティック商で G がトーラスの場合として, ハイパートーリック多様体を以下で定義したい．まず以下の自由アーベル群の完全系列が与えられたとする．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-d} \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^d \longrightarrow 0$$

そして後で用いるため行列 A, B を次のようにそれぞれ列ベクトル, 行ベクトルで表示しておく．

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$$

さて上の完全列に対し $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{C}^\times)$ を取ると次の代数トーラスの間の完全系列を得る．

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^d \xrightarrow{{}^tA} \mathbb{T}^n \xrightarrow{{}^tB} \mathbb{T}^{n-d} \longrightarrow 1$$

注意． 以下では行列 A がユニモジュラー (i.e., 全ての $d \times d$-小行列式は 0 か ± 1 となる) となっていると仮定する．これは以下で定義するハイパートーリック多様体が仮定 2.3 を満たすために必要となる．

さて以下でハイパートーリック多様体及びそれを含むトーリック多様体である Lawrence トーリック多様体を定義する.

定義 & 補題 3.1. (Lawrence トーリック多様体とハイパートーリック多様体)
上の状況で ${}^tA : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^n$ の埋め込みによって $\mathbb{T}^d$ の $\mathbb{C}^n$-表現を考え, この表現から自然に定まる $\mathbb{T}^d$ の $(\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*, \omega_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^n dz_j \wedge dw_j)$ への作用を考える. この時モーメント写像は

$$\mu : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^d \quad : \quad (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \mapsto \sum_{j=1}^{n} z_j w_j \boldsymbol{a_j}$$

で与えられる. そこで

$$X(A, \alpha) := X(\alpha)$$

$$Y(A, (\alpha, \xi)) := Y(\alpha, \xi)$$

と定め, それぞれ **Lawrence トーリック多様体**, **超トーリック多様体**と呼ぶ (cf. 定義&補題 2.2).

注意. 一般の代数的シンプレクティック商の時と同様に, 以下のような $\mathbb{C}^\times$-同変な可換図式が存在することに注意する. なお A をユニモジュラー, α を generic に取っておけば $\pi := \pi_0$ はシンプレクティック特異点解消を与えることが知られている.

$$\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni" sloped] & & 0 \arrow[dl, phantom, "\ni" sloped] \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, equal] & & \mathbb{C}^d &
\end{tikzcd}$$

4 非特異ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形

さて非特異ハイパートーリック多様体の場合には Kirwan 写像がいつ同型になるかについて Konno([Ko1]) による次の結果が知られている.

定理 4.1. (Konno [Ko1])
A がユニモジュラー, α を generic とする. すべての i に対し $\boldsymbol{b_i} \neq 0$ ならば Kirwan 写像 $\kappa^2_{Y(\alpha)}$ は同型

この結果と定理 2.8 から次が従う.

系 4.2. 上の定理の仮定を満たす時, Lawrence トーリック多様体 $X(A, \alpha)$ 及び射 $\bar{\mu} : X(A, \alpha) \to \mathbb{C}^d$ が非特異ハイパートーリック多様体 $Y(A, \alpha)$ の普遍ポアソン変形を与える.

注意. 与えられたハイパートーリック多様体 $Y(A, \alpha)$ が定理 4.1 の仮定を満たさない時も A と α を適切に別の A', α' に取り換えることで, 仮定を満たしかつシンプレクティック代数多様体として $Y(A, \alpha) \cong Y(A', \alpha')$ とできることが分かる.

5 アファインハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形

本節ではアファインハイパートーリック多様体 $Y(A,0)$ の普遍ポアソン変形を決定したい．まず Namikawa Weyl 群を決定する．以下で行列 A がユニモジュラーということから行列 B の各行ベクトルを並び替えたり ± 1 倍したりすることで

$$B = \left(\begin{array}{c} B^{(1)} \\ \hline B^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline B^{(s)} \end{array} \right), \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b^{(k)}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b^{(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{ただし } k_1 \neq k_2 \text{ なら } \boldsymbol{b^{(k_1)}} \text{ と } \boldsymbol{b^{(k_2)}} \text{ は互いに平行ではない.}$$

という形に取り換えられることに注意する（ $B^{(k)}$ は $\ell_k \times (n-d)$ 行列とする)．以下では特に断らない限り，B がこのような形になっていると仮定する．すると補題 2.10 で述べた余次元 2 の特異点集合の連結成分への分解及びスライスは以下のように与えられることが分かる．

系 5.1. ([PW] の系)
アファインハイパートーリック多様体 $Y(A,0)$ の余次元 2 の特異点集合 $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ は

$$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_{k=1}^{s} \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$$

という連結成分への分解を持つ．ここで

$$\mathring{Y}^{(k)}(A,0) := \big\{ (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^{2n} \ \mid \ i \in \{m_{k-1}+1, \ldots, m_k\} \Leftrightarrow (z_i, w_i) = 0 \big\} /\!/ \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \ \subseteq Y(A,0)$$

はシンプレクティック部分代数多様体である (ただし $m_k := \sum_{i=1}^{k} \ell_i$ と定める)．さらに各点 $y \in \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$ におけるスライスは A_{ℓ_k} 型曲面特異点である．特に $Y(A,0)$ の Namikawa-Weyl 群 W は $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の部分群である．

以下で $W = W_B$ となることを示したい．本来 Namikawa-Weyl 群の定義から W を求めるためには上の系で述べたような局所的な記述ではなく大域的に $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ の定める $Y(A,\alpha)$ 内の例外因子の既約成分がいくつあるかを見る必要があった．これを直接見るのは一般には難しい．しかし今ハイパートーリック多様体及びローレンストーリック多様体が満たす次の $\mathbb{C}^{\times}$-同変な図式があることに注意する．

$$\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & & X(A,0) \arrow[dd, "\bar{\mu}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] & & 0 \\
\mathbb{C}^d \arrow[rr, equal] \arrow[ur, phantom, "\ni"] & & \mathbb{C}^d \arrow[ur, phantom, "\ni"] &
\end{tikzcd}$$

今系 4.2 で見たように $\bar{\mu} : X(A,\alpha) \to \mathbb{C}^d$ は $Y(A,\alpha)$ の普遍ポアソン変形であった．すると $W = W_B$ となることを示すためには定理 1.1 及び普遍性から次を示せば十分なことがすぐに分かる．なおこの補題は Namikawa-Weyl 群の作用の具体的な記述も与えている．

補題 5.2. 上の状況で $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の $X(A,0)$ と $\mathbb{C}^d$ への作用で以下を満たすものが構成できる.

(i) $\mathbb{C}^d$ への W_B-作用は線形作用で, $X(A,0)$ への W_B-作用はポアソン構造を保つ.
(ii) $\bar{\mu} : X(A,0) \to \mathbb{C}^d$ は W_B-同変である.
(iii) W_B-作用は $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用と可換である.
(iv) W_B は $Y(A,0) \subseteq X(A,0)$ には自明に作用する.

具体的には $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s} \subseteq \mathfrak{S}_n$ と思って $\mathbb{C}^{2n}$ の座標 $z_1, \ldots, z_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ それぞれの置換作用が $X(A,0)$ への作用を誘導し, $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ たちの置換作用が $\mathbb{C}^d = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ への作用を誘導する.

定理 5.3. (主定理)
A がユニモジュラーで α が generic とする. そして B は上で述べたような形に取り換えておいてあるとし, W_B を $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ に上で述べたように作用させたとき, ハイパートーリック多様体に対する定理 1.1 の可換図式は次のように与えられる (ただし Π_{W_B} は $\Pi : X(A,\alpha) \to X(A,0)$ と W_B による商写像の合成とする).

$$
\begin{tikzcd}
& Y(A,\alpha) \arrow[dl, hook'] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dd] & & Y(A,0) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
X(A,\alpha) \arrow[rr, "\Pi_{W_B}"] \arrow[dd, "\bar{\mu}"'] & & X(A,0)/W_B \arrow[dd, "\bar{\mu}_{W_B}"] & \\
& 0 \arrow[rr, mapsto] & & \bar{0} \\
\mathbb{C}^d \arrow[ur, phantom, "\ni"] \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{C}^d/W_B \arrow[ur, phantom, "\ni"] &
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[BD] R. Bielawski and A. Dancer. The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds. Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 727-760.

[HSt] T. Hausel and B. Sturmfels. Toric hyperKähler varieties. Doc. Math. 7 (2002), 495-534 (electronic).

[Kal] D. Kaledin. Symplectic singularities from the Poisson point of view. J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135-156.

[Ko1] H. Konno. Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 11 (2000), no. 8, 1001-1026.

[Ko2] H. Konno. Variation of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 14 (2003), no. 3, 289-311.

[Na1] Y. Namikawa. Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), 259-314

[Na2] Y. Namikawa. Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727-752.

[Na3] Y. Namikawa. Poisson deformations and birational geometry. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 339-359.

[PW] N. Proudfoot and B. Webster. Intersection cohomology of hypertoric varieties. J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 1, 39-63.

[Slo] P. Slodowy. Four lectures on simple groups and singularities. Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, 1980. ii+64 pp.