局所対称ケーラー多様体の変形量子化

[1] 原 健太郎 (Hara Kentaro) , [2] 佐古 彰史 (Sako Akifumi)

[1,2] 東京理科大学 理学研究科 科学教育専攻 博士後期課程 2 年, [2] 東京理科大学 理学部第二部 数学科

Abstract

我々は局所対称 Kähler 多様体を非可換変形する方法を見出した。曲率テンソルの共変微分が消滅している場合、Kähler 多様体 M は、局所対称な Kähler 多様体であると言われる。局所的に対称な Kähler 多様体を構築するための代数的導出プロセスが与えられる。例として、コンパクトリーマン面と射影空間 $\mathbb{C}P^N$ のスター積を構築する。

MSC:53D55,81R60
Keywords:変形量子化、非可換リーマン面、局所対称 Kähler 多様体、非可換幾何学

1 Kähler 多様体の変数分離変形量子化

このセクションでは、Kähler 多様体の変数分離変形量子化を定義する。

N 次元の Kähler 多様体 M の Kähler 計量は Kähler ポテンシャルを使って記述される。Φ を Kähler ポテンシャルとし、ω を Kähler 2 形式とすると

$$\omega := \mathrm{i} g_{k\bar{l}} \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\bar{z}^l, \quad g_{k\bar{l}} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}. \tag{1.1}$$

となる。ただし $z^i, \bar{z}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ は正則座標とする。
このテクニカルレポートでは、我々はアインシュタイン総和規約を使用する。$g^{\bar{k}l}$ は Kähler 計量行列 $g_{k\bar{l}}$ の逆行列である。 つまり $g^{\bar{k}l} g_{l\bar{m}} = \delta_{\bar{k}\bar{m}}$ ということである。以下我々は

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \ \partial_{\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}. \tag{1.2}$$

とする。変形量子化は以下のように定義される。

Definition 1 (Deformation quantization)**.** ポアソン多様体の変形量子化は以下のように定義される。$\mathcal{F}$ は形式的な関数列の集合として定義されている: $\mathcal{F} := \left\{ f \;\middle|\; f = \sum_k f_k \hbar^k, \ f_k \in C^\infty(M) \right\}$. 非可換積 $*$ は

$$f * g = \sum_k C_k(f, g) \hbar^k \tag{1.3}$$

であり、以下を満たす。

1. $(\mathcal{F}, +, *)$ は、（非可換の）代数

2. $C_k(\cdot,\cdot)$ は双微分演算子

3. $C_0(f,g) = fg, C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}$ （ただし $\{f,g\}$ は *Poisson bracket*）

4. $f * 1 = 1 * f = f.$

Karabegov は、[6] の中で Kähler 多様体の変形量子化を得る方法を導出した。彼の変形量子化は、変数分離変形量子化と呼ばれる。

Definition 2 (変数分離変形量子化)**.** 正則関数 a、反正則関数に対して $a * f = af, f * b = fb$ を満たすとき $*$ をけケーラー多様体の変数分離変形量子化のスター積という。

以下 $D^{\bar{l}} = g^{\bar{l}k}\partial_k$ とし、$\mathcal{S} := \left\{ A \mid A = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(M) \right\}$, とする。ただし α は多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ である。またアインシュタインルール $a_\alpha D^\alpha := \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ を用いる。 L_f は $f * g = L_f g$ を意味する。

Theorem 1.1. [Karabegov [6]]. 任意の Kähler form ω, に対してスター積 $*$ が以下のように構成される。f を $\mathcal{F}$ の元とし、

$$A_n = a_{n,\alpha}(f) D^\alpha,\ D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} (D^{\bar{i}})^{\alpha_i},\ (D^{\bar{i}}) = g^{\bar{i}l}\partial_l, \tag{1.4}$$

とすると、

$$L_f = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n A_n \tag{1.5}$$

は以下の条件によって一意的に定まる。

1. $R_{\partial_{\bar{l}}\Phi} := \partial_{\bar{l}}\Phi + \hbar\partial_{\bar{l}}$,

$$\left[L_f, R_{\partial_{\bar{l}}\Phi}\right] = 0\ . \tag{1.6}$$

2.

$$L_f 1 \quad = \quad f * 1 = f. \tag{1.7}$$

上記条件は結合律

$$L_h(L_g f) \quad = \quad h * (g * f) = (h * g) * f = L_{L_h g} f. \tag{1.8}$$

に由来する。

2 局所対称 Kähler 多様体の変数分離変形量子化

演算子を以下のように定義する。

$$D^k = g^{k\bar{m}}\partial_{\bar{m}}, D^{\bar{j}} = g^{\bar{j}l}\partial_l, D^{\vec{\alpha_n}} := D^{\alpha_1^n}D^{\alpha_2^n}\cdots D^{\alpha_N^n}, D^{\vec{\beta_n}} := D^{\beta_1}D^{\beta_2}\cdots D^{\beta_N}, D^{\alpha_k} := \left(D^k\right)^{\alpha_k}, D^{\beta_j} := \left(D^{\bar{j}}\right)^{\beta_j},$$

$\vec{\alpha_n} \notin \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ に対し $D^{\vec{\alpha_n}} := 0$ とする。

Theorem 2.1. 局所対称 Kähler 多様体の変数分離変形量子化は以下のように得られる。

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}} T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}}\left(D^{\vec{\alpha_n}}f\right)\left(D^{\vec{\beta_n^*}}g\right),$$

ただし係数 $T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}}$ は以下の漸化式によって決定する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{d=1}^{N}\hbar g_{\bar{i}d}T^{n-1}_{\vec{\alpha_n}-\vec{e_d}\vec{\beta_n^*}-\vec{e_i}} \\
&= \beta_i T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\frac{\hbar\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 1\right)\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 2\right)}{2}R_{\bar{p}}{}^{\bar{k}\bar{k}}{}_{\bar{i}}\, T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}-\vec{e_p}+2\vec{e_k}-\vec{e_i}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-k}\sum_{p=1}^{N}\hbar\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 1\right)\left(\beta_{k+l}^n - \delta_{(k+l),p} - \delta_{i,(k+l)} + 1\right)R_{\bar{p}}{}^{\overline{k+l}\bar{k}}{}_{\bar{i}}\, T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}-\vec{e_p}+\vec{e_k}+\vec{e_{k+l}}-\vec{e_i}}.
\end{aligned}$$

3 具体例：コンパクトリーマン面の変数分離変形量子化

スカラー曲率 R を

$$R = g^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}} = R_l{}^{\bar{j}l}{}_{\bar{j}}.$$

とする。

Theorem 3.1. コンパクトリーマン面の変数分離変形量子化は以下のように得られる。

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(g^{1\bar{1}}\right)^n\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{2\hbar}{2k+\hbar k\left(k-1\right)R}\right\}\left\{\left(g^{1\bar{1}}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f\right\}\left\{\left(g^{1\bar{1}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n g\right\}\right]$$

.

Example 1. $(\mathbb{C}, g)$：ガウス平面

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\hbar^n}{n!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n g \right\} \right].$$

Example 2. よく知られた平坦トーラス埋め込み $X : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), u = Re(z), v = Im(z)$$
$$\Longrightarrow R = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} = 0$$

に対し、第一基本形式

$$E = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 1, F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0, G = \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

となり、誘導計量

$$\tilde{g}_{1\bar{1}} = E = G = 1.$$

となる。よってスター積は

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\hbar^n}{n!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n g \right\} \right].$$

Acknowledgments
A.S. was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 16K05138.

References

[1] Bordemann M., Brischle M., Emmrich C., Waldmann S., *Phase Space Reduction for Star-Products: An Explicit Construction for* $\mathbb{C}P^n$, Lett. Math. Phys. **36** (1996) 357-371, [arXiv:q-alg/9503004].

[2] Halima M. , Tilmann W., *Fuzzy complex Grassmannians and Quantization of Line Bundles,* Semin. Univ. Hambg. (2010) 80: 59-70.

[3] Halima M. , *Construction of Certain Fuzzy Flag Manifolds,* Rev. Math. Phys. **22**, (2010) 533-548.

[4] Hayasaka K., Nakayama R. and Takaya Y., *A New Noncommutative Product on the Fuzzy Two Sphere Corresponding to the Unitary Representation of SU(2) and the Seiberg-Witten map,* Phys. Lett. B **553**, (2003) 109-118, [arXiv:hep-th/0209240].

[5] Hara K. and Sako A., *Noncommutative Deformations of Locally Symmetric Kähler manifolds,* J. Geom. Phys. **114** (2017) 554-569 doi:10.1016/j.geomphys.2017.01.009, [arXiv:math-ph/1608.08146].

[6] Karabegov A., *Deformation Quantizations with Separation of Variables on a Kähler Manifold,* Commun. Math. Phys. **180**, (1996) 745-755, [arXiv:hep-th/9508013].

[7] Karabegov A., *Pseudo-Kähler Quantization on Flag Manifolds,* [arXiv:dg-ga/9709015].

[8] Murray S. and Saemann C., *Quantization of Flag Manifolds and Their Supersymmetric Extensions,* Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008) no.3 641-710 doi:10.4310/ATMP.2008.v12.n3.a5 , [arXiv:hep-th/0611328].

[9] Ohsaku T., *Algebra of Noncommutative Riemann surfaces,* [arXiv:math-ph/0606057].

[10] Sako A., Suzuki T. and Umetsu H., *Noncommutative CP^N and CH^N and Their Physics,* J. Phys. Conf. Ser. **442**, 012052 (2013) 305-320.

[11] Schlichenmaier M., *Some Naturally Defined Star Products for Kähler Manifold,* Trav. math. **20** (2012) 187-204.