高次元複素トーラス上の射影的平坦束の成す完全三角系列の幾何構造

千葉大学大学院理学研究科　小林和志 *　(Kazushi Kobayashi)

1 導入

1.1 背景

本稿では, 筆者によって得られたトーラス上のホモロジー的ミラー対称性に関連したいくつかの研究結果について紹介する. ミラー対称性とは, 本来はカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ に対し, M のシンプレクティック構造にのみ依存して定まる量と $\check{M}$ の複素構造にのみ依存して定まる量が一致するという現象を指すが, ホモロジー的ミラー対称性はこれの圏論的定式化として提案された予想であり, その具体的な主張は次のようになる [8].

予想 1.1. (Kontsevich). *任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し, M 上で定義される深谷圏 $Fuk(M)$ から得られる三角圏 $Tr(Fuk(M))$ と $\check{M}$ 上で定義される連接層の成す有界導来圏 $D^b(Coh(\check{M}))$ が三角圏として圏同値となる. ここで, $Tr(\mathscr{C})$ は A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ から得られる三角圏を表す.*

この予想 1.1 に関して, いくつか注意事項を記しておく. まず, 深谷圏 [2] とは M 内のラグランジュ部分多様体とその上の局所系の組の成す A_∞ 圏であり, また, $D^b(Coh(\check{M}))$ の替わりに, $\check{M}$ 上の正則ベクトル束の成す DG 圏 (高次の積が 0 となるような A_∞ 圏)$DG_{\check{M}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{M}})$ であって, $D^b(Coh(\check{M})) \cong Tr(DG_{\check{M}})$ となるようなものを考える場合もある. 特に, A_∞ 圏としての圏同値 $Fuk(M) \cong DG_{\check{M}}$ が言えれば, 自動的に $Tr(Fuk(M)) \cong Tr(DG_{\check{M}})$, すなわちホモロジー的ミラー対称性が成り立つことが知られている.

1.2 問題意識

以下, 実 $2n$ 次元シンプレクティックトーラス T^{2n} と n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ をミラー対としてとって考える. このとき, 大雑把に言うと, T^{2n} 内のアファインラグランジュ部分多様体 L とその上の局所系 $\mathcal{L} \to L$ の組に対応して $\check{T}^{2n}$ 上の正則ベクトル束 $E(L, \mathcal{L})$ が 1 つ定まる [1]. 一方, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関してはその保型因子についての (定数行列に関する任意性を除いた) 分類結果が既に存在し, さらに $E(L, \mathcal{L})$ はその定義から射影的平坦束となることは明らかである. しかしながら, $E(L, \mathcal{L})$ がその分類結果においてどのクラスに属する射影的平坦束で

*E-mail : afka9031@chiba-u.jp

[1]SYZ 構成 [10] に基づいて考える場合, 特殊ラグランジュトーラスファイバーとその上の局所系の組が摩天楼層と呼ばれる連接層に対応する. しかしながら本稿では正則ベクトル束の成す DG 圏を用いて議論を進めるので, このあたりの話はあまり気にしなくてもよい.

あるのかを考えるということは非自明な問題であるから, 本稿ではまず, この $E(L,\mathcal{L})$ がどのようなクラスに属する射影的平坦束であるのかということを明らかにする.

さらに, この $E(L,\mathcal{L})$ の成す DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において, 射 $\psi : E(L_b,\mathcal{L}_b) \to TE(L_a,\mathcal{L}_a)$($T$ は $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ におけるシフト関手を表す) の写像錐 $C(\psi)$ に付随する完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E(L_a,\mathcal{L}_a) \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E(L_b,\mathcal{L}_b) \xrightarrow{\psi} TE(L_a,\mathcal{L}_a) \longrightarrow \cdots \quad (1)$$

を考える. このとき, 対応するシンプレクティック幾何学側の観点から見た (1) に対する解釈として, $C(\psi)$ が射影的平坦束となる場合, すなわち, (1) が 3 つの射影的平坦束とその次数シフトから成る完全三角系列となる場合, $\mathrm{codim}(L_a \cap L_b) \leq 1$ となることを証明する.

2 準備

本章では, 第 3 章において必要となる概念についていくつか定義を与える.

まず, A_∞ 圏, DG 圏の定義を復習しておく.

定義 2.1. *A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ とは, 対象の集合 $Ob(\mathscr{C}) = \{X, Y, \cdots\}$ と, 任意の 2 つの対象 $X,\ Y \in Ob(\mathscr{C})$ に対する $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間 $\mathscr{C}(X,Y) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathscr{C}^r(X,Y)$ に加え, 以下の A_∞ 関係式を満たすような次数 $(2-n)$ の多重線形写像 $m_n : \mathscr{C}(X_1,X_2)\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(X_n,X_{n+1}) \to \mathscr{C}(X_1,X_{n+1})$ の集まり $\{m_n\}_{n\geq 1}$ が与えられているようなもののことをいう. ただし, $|a|$ は $a \in \mathscr{C}(X,Y)$ の次数を表す.*

$$0 = \sum_{k+l=n+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{(j+1)(l+1)+l(|a_1|+\cdots+|a_j|)}m_k(a_1,\cdots,a_j,m_l(a_{j+1},\cdots,a_{j+l}),a_{j+l+1},\cdots,a_n).$$

また, A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ であって, 高次の積が 0 となる, すなわち $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ となるようなものを DG 圏という.

特に, A_∞ 関係式を $n = 1, 2$ の場合に具体的に書き下してみると次のようになることが分かる.

$$n = 1 \ : \ m_1(m_1(a_1)) = 0.$$
$$n = 2 \ : \ m_1(m_2(a_1,a_2)) = m_2(m_1(a_1),a_2) + (-1)^{|a_1|}m_2(a_1,m_1(a_2)).$$

これらはすなわち, $(\mathscr{C}(X,Y), m_1)$ が複体を成し, さらに微分 m_1 が積 m_2 に関してライプニッツ則を満たすということを主張している. また, A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ が与えられた場合, $\mathscr{C}$ の「片側捻り複体」を対象とする A_∞ 圏を構成し, それのゼロ次のコホモロジーをとることによってある三角圏を定義することができるということが一般的に知られているが, その三角圏が本稿の第 1 章で述べた $Tr(\mathscr{C})$ である [1], [8].

次に, 射影的平坦束の定義とその基本的な性質を述べる ([7], [9], [11] なども参照せよ).

定義 2.2. *X をコンパクトなケーラー多様体, E を X 上で定義されている階数 r の正則ベクトル束, $P(E)$ を E に付随して定まる主 $GL(r;\mathbb{C})$ 束, $\hat{P}(E)$ を $\hat{P}(E) := P(E)/\mathbb{C}^\times \cdot I_r$ によって定まる主 $PGL(r;\mathbb{C})$ 束とする. ただし, I_r は r 次単位行列を表す. このとき, E が射影的平坦束であるとは, $\hat{P}(E)$ が平坦であることをいう.*

Lie 群 $GL(r;\mathbb{C})$, $PGL(r;\mathbb{C})$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{gl}(r;\mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(r;\mathbb{C})$ と書くことにすると, 自然な射影 $\pi : GL(r;\mathbb{C}) \to PGL(r;\mathbb{C})$ は Lie 環の間の準同型写像 $\pi' : \mathfrak{gl}(r;\mathbb{C}) \to \mathfrak{pgl}(r;\mathbb{C})$ を誘導する. このとき, 正則ベクトル束 E の接続から定まる曲率形式を Ω_E とすると, $\hat{P}(E)$ の曲率形式は $\pi'(\Omega_E)$ と表される. したがって, E が射影的平坦束である場合には $\pi'(\Omega_E) = 0$ となるので, このことから直ちに以下の命題を得る.

命題 2.3. Ω_E をコンパクトなケーラー多様体上で定義された階数 r の正則ベクトル束 E の接続から定まる曲率形式とする. このとき, E が射影的平坦束となることと, ある複素 2 次微分形式 α が存在して $\Omega_E = \alpha \cdot I_r$ となることは同値である.

特に, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関しては比較的よく研究されているが, 以下, 第 3 章において必要となる複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関する基礎事項をまとめておく.

定義 2.4. Γ を $\mathbb{C}^n$ 内の格子, $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Gamma$ を被覆射影, $E \to \mathbb{C}^n/\Gamma$ を階数 r の正則ベクトル束とする. このとき, $\tilde{E} := p^*E \to \mathbb{C}^n$ は階数 r の自明な正則ベクトル束となる ($\tilde{E} \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$) ことに注意する. このような状況下において, 次の図式を可換にするような正則写像 $j : \Gamma \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ を E の保型因子という. ただし, $z \in \mathbb{C}^n$, $\gamma \in \Gamma$ であるとする.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}_{z+\gamma} \cong \mathbb{C}^r \arrow[dr] & & \tilde{E}_z \cong \mathbb{C}^r \arrow[ll, "j(\gamma,z)"'] \arrow[dl] \\
& E_{p(z)} &
\end{tikzcd}$$

より具体的に, 複素トーラス上で定義される階数 r の射影的平坦束の保型因子 $j : \Gamma \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ は,

$$\mathrm{Im}R(\gamma, \gamma') \in \pi\mathbb{Z}, \ \gamma, \gamma' \in \Gamma$$

を満たすようなエルミート形式 $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ と,

$$U(\gamma + \gamma') = U(\gamma)U(\gamma')\mathrm{exp}\left\{\frac{\mathbf{i}}{r}\mathrm{Im}R(\gamma', \gamma)\right\}, \ \gamma, \gamma' \in \Gamma$$

を満たすような写像 $U : \Gamma \to U(r)$ を用いて

$$j(\gamma, z) = U(\gamma)\mathrm{exp}\left\{\frac{1}{r}R(z, \gamma) + \frac{1}{2r}R(\gamma, \gamma)\right\}, \ (\gamma, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}^n$$

と表されることが知られている. ここで, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ である.

3 主結果

本章の目的は, 第 2 章において準備した基礎事項をもとにして, 筆者によって得られた結果である定理 3.3, 定理 3.4 を紹介することである [5]. まず, 第 3.1 節において考察の舞台となるミラー対やそれらの上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に用いる正則ベクトル束などについて説明し, 第 3.2 節において筆者によって得られた結果やそれらの証明の概略を述べる.

3.1 ミラー対 $(T^{2n}, \check{T}^{2n})$, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の構成

まず, 以下のようにして n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ を定義する. 座標 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)^t \in \mathbb{R}^{2n}$ を考え, $x_i \sim x_i + 2\pi$, $y_i \sim y_i + 2\pi$ $(i=1,\cdots,n)$ のように同一視することによって得られる実 $2n$ 次元トーラス $\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n}$ の座標も同様にして $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)^t$ と書く. ただし, 簡単のため $x := (x_1,\cdots,x_n)^t$, $y := (y_1,\cdots,y_n)^t$ と略記する場合もある. また, 後の議論で必要となるため, この実 $2n$ 次元トーラス $\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n}$ の開被覆 $\{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\}_{l_j,m_k=1,2,3}$ $(j,k=1,\cdots,n)$ を

$$O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n} \mid \frac{2}{3}\pi(l_j-1)-\varepsilon < x_j < \frac{2}{3}\pi l_j+\varepsilon,\ \frac{2}{3}\pi(m_k-1)-\varepsilon < y_k < \frac{2}{3}\pi m_k+\varepsilon \right\}$$

と定義しておく. ここで, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ は十分小さい正の数であると仮定する. このとき, 虚部が正定値となるような非特異 [2] n 次複素行列 $T=(t_{ij})$ を用いて複素座標 $z := (z_1,\cdots,z_n)^t$ を $z := x + Ty$ と定義する. この複素トーラスを $\check{T}^{2n} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ と書く. さらに, $L \subset \mathbb{C}^n$ を以下の元によって生成される格子とする (すなわち, $\check{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/L$ である).

$$\gamma_1 := (2\pi,0,\cdots,0)^t,\cdots,\gamma_n := (0,\cdots,0,2\pi)^t, \gamma'_1 := (2\pi t_{11},\cdots,2\pi t_{n1})^t,\cdots,\gamma'_n := (2\pi t_{1n},\cdots,2\pi t_{nn})^t.$$

この n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーとして次のような複素化されたシンプレクティック形式 $\tilde{\omega}$ を持つような実 $2n$ 次元トーラス T^{2n} をとる. ただし, 先と同様, $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)^t$, $x^i \sim x^i + 2\pi$, $y^i \sim y^i + 2\pi$ $(i=1,\cdots,n)$ は T^{2n} の局所座標を表すものとする.

$$\tilde{\omega} := -(dx^1,\cdots,dx^n)(T^{-1})^t \begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{pmatrix}.$$

また, しばしば簡単のため $\check{x} := (x^1,\cdots,x^n)^t$, $\check{y} := (y^1,\cdots,y^n)^t$, $d\check{x} := (dx^1,\cdots,dx^n)^t$, $d\check{y} := (dy^1,\cdots,dy^n)^t$ と略記する. この $\tilde{\omega}$ を $\tilde{\omega} = d\check{x}^t B d\check{y} + \mathbf{i} d\check{x}^t \omega d\check{y}$ と分解したとき, $d\check{x}^t \omega d\check{y}$ がシンプレクティック形式を表し, $d\check{x}^t B d\check{y}$ は B 場と呼ばれる.

以上でミラー対 $((T^{2n},\tilde{\omega}), \check{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n))$ が定義できたので, 次に, これらの上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に用いる圏の対象となる正則ベクトル束やラグランジュ部分多様体などを定義する. 以下, $r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{Z})$, $\mu := (\mu_1,\cdots,\mu_n)^t \in \mathbb{C}^n$, $p := (p_1,\cdots,p_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $q := (q_1,\cdots,q_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mu = p + T^t q$, $\zeta := \exp\{\frac{2\pi\mathbf{i}}{r}\}$ とする.

まず, 階数 r の正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to \check{T}^{2n}$ を次のようにして定める. 変換関数について, 滑らかな $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の切断 $\psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} : O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} \to \mathbb{C}^r$, $l_j, m_k = 1,2,3$ に対して

$$\begin{aligned}
&\psi^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\cap O^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}} \\
&= e^{\frac{\mathbf{i}}{r}a_j y} V_j\ \psi^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\cap O^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}}, \qquad (2) \\
&\psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n}\cap O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}} \\
&= U_k\ \psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n}\cap O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

---

[2] T が特異行列となる場合, 本稿で述べるやり方では $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーを定義することができない. しかしながら, T が特異行列となる場合であっても, $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーの定義の仕方と考えるべき正則ベクトル束のクラスを少しずらすことによってホモロジー的ミラー対称性を議論することができる [6].

と定義する (他の開集合の共通部分上では自明であるとする). ただし, $a_j := (a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, $V_j, U_k \in U(r)$ であるとし, (2), (3) は簡単に言うとそれぞれ $x_j \mapsto x_j + 2\pi$, $y_k \mapsto y_k + 2\pi$ とした場合に関する変換関数を表す. このときコサイクル条件は

$$V_jV_k = V_kV_j,\ U_jU_k = U_kU_j,\ \zeta^{-a_{kj}}U_kV_j = V_jU_k,\ j,k = 1, \cdots, n$$

と表されるが, これらの関係式を満たすような V_j, U_k の成す集合を $\mathcal{U}$ と書く.

$$\mathcal{U} := \Big\{ V_j, U_k \in U(r) \mid V_jV_k = V_kV_j,\ U_jU_k = U_kU_j,\ \zeta^{-a_{kj}}U_kV_j = V_jU_k,\ j,k = 1, \cdots, n \Big\}.$$

これで階数 r の複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が定義されたが, さらに, この $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 上の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を以下で定める. ここで, $dy := (dy_1, \cdots, dy_n)^t$ であり, d は外微分作用素を表す.

$$\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = d + \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} := d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(\frac{1}{r}x^tA^t + \frac{1}{r}\mu^t\right)dy \cdot I_r. \tag{4}$$

これより $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} := d\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} + \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \wedge \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を計算することができるが, 一般的に, ある複素ベクトル束が与えられた場合, その複素ベクトル束が正則ベクトル束となることとそれの曲率形式の (0,2)-part が消えることは同値である. このことを考慮して直接計算することにより, 次の命題を得る ([5], Proposition 2.2).

命題 3.1. 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則ベクトル束となることと n 次複素行列 AT が対称行列となることは同値である. このとき, $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は局所的に以下で与えられる. ただし, $dz := (dz_1, \cdots, dz_n)^t$, $d\bar{z} := (d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n)^t$ であるとする.

$$\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \frac{\mathbf{i}}{2\pi r}dz^t\{(T-\bar{T})^{-1}\}^tAd\bar{z} \cdot I_r.$$

これ以降は常に $AT = (AT)^t$ を仮定し, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ と書いた場合には正則ベクトル束を指すものとする. 特に, 上記の命題 3.1 と第 2 章における命題 2.3 より, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が射影的平坦束となることは明らかである. また, 後の都合上 n 次正方行列 R を

$$R := \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\{(T-\bar{T})^{-1}\}^tA$$

と定義しておく (すなわち, $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \frac{1}{r}dz^tRd\bar{z} \cdot I_r$ である). しかしながら, 今 $AT = (AT)^t$ を仮定しているため, この R は実際には n 次実対称行列となることに注意する.

次に, 正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の成す DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ について説明する. この $DG_{\check{T}^{2n}}$ の対象はもちろん正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ であるが, 任意の 2 つの対象 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$, $E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ の間の射の成す空間は以下のようにして定義する.

$$\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) := \Gamma(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \otimes_{C^\infty(\check{T}^{2n})} \Omega^{0,*}(\check{T}^{2n}).$$

ここで, $\Gamma(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ は束準同型 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ の成す空間, $\Omega^{0,*}(\check{T}^{2n})$ は $\check{T}^{2n}$ 上で定義される反正則な微分形式の成す空間を表し, $\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ の次数をこの反正則な微分形式の次数を用いて定義することによって $\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ は $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間となる. 特に, 次数 r を明記したい場合は $\mathrm{Hom}^r_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ のように書く. さらに, 微分を

$$\mathrm{Hom}^r_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{r+1}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}),$$
$$\psi \longmapsto (2\nabla^{(0,1)}_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})(\psi) - (-1)^r\psi(2\nabla^{(0,1)}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})})$$

で定義し, 積構造をそれぞれの正則ベクトル束同士の束準同型の合成, 及び反正則な微分形式同士の wedge 積をとることによって定める. このとき, これらの微分と積構造がライプニッツ則を満たすので, この $DG_{\check{T}^{2n}}$ は DG 圏となる.

本節の最後に, 対応するシンプレクティック幾何学側の話を簡単に説明しておく. 全体を通して議論の中心となるのは $(T^{2n}, \tilde{\omega})$ 内のラグランジュ部分多様体 (すなわち, $d\check{x}^t\omega d\check{y}|_L = 0$ となるような T^{2n} 内の n 次元部分多様体 L) であるが, 正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ に対応するラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ は以下で与えられる.

$$L_{(r,A,p)} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ \check{y} \end{pmatrix} \in (T^{2n}, \tilde{\omega}) \mid \check{y} = \frac{1}{r}A\check{x} + \frac{1}{r}p \right\}.$$

特に, (4) の接続形式 $\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の部分にはこのラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ の定義式の形がそのまま含まれている状態になっている. また, 接続形式 $\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 内における $q \in \mathbb{R}^n$ は (定義より, $\mu = p + T^t q$ である), このラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ 上で定義される局所系のユニタリホロノミーに対応する部分であるが (深谷圏の対象はラグランジュ部分多様体とその上の局所系の組で与えられる), 本稿ではシンプレクティック幾何学側の話に関してはラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ に焦点を当てて議論を進めるため, このあたりの話は気にしなくてもよい.

3.2 主定理

以下, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ がどのようなクラスに属する射影的平坦束であるのか, という問に対する回答を述べる. 第 3.1 節において $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ について説明した際に n 次実対称行列 R を導入したが, 同じ記号を用いてエルミート形式 $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を以下で定める. ただし, $z = (z_1, \cdots, z_n)^t$, $w = (w_1, \cdots, w_n)^t \in \mathbb{C}^n$ であるとする.

$$R(z, w) := \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} z_i \bar{w}_j,\ R_{ij} = \left(\frac{\mathbf{i}}{2\pi} \{(T - \bar{T})^{-1}\}^t A \right)_{ij}. \tag{5}$$

第 2 章において複素トーラス上で定義された射影的平坦束の保型因子について述べた際に, エルミート形式 $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ と格子 Γ の元 γ, γ' に対して $\mathrm{Im}R(\gamma, \gamma') \in \pi\mathbb{Z}$ となるということを書いたが, 今考えている射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ に関しても実際に次の命題が成り立つ ([5], Proposition 3.4, Proposition 3.5).

命題 3.2. 上記の (5) で定義されるエルミート形式に対して, $\mathrm{Im}R(\gamma_j, \gamma_k) = 0$, $\mathrm{Im}R(\gamma'_j, \gamma'_k) = 0$, $\mathrm{Im}R(\gamma_j, \gamma'_k) = -\pi a_{kj}$, $\mathrm{Im}R(\gamma'_k, \gamma_j) = \pi a_{kj}$ が成り立つ. ここで, $j, k = 1, \cdots, n$ である.

この命題 3.2 は, $AT = (AT)^t$ が成り立つということに注意して直接計算することにより証明することができる. 今, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式は $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = -\frac{1}{r} dz^t R d\bar{z} \cdot I_r$ によって与えられているので, この $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は以下のような保型因子 $j : L \times \mathbb{C}^n \to GL(r; \mathbb{C})$, 及び接続 $\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を持つような射影的平坦束 $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to \check{T}^{2n}$ と同型であることが予想される. ただし, $U(\gamma_j), U(\gamma'_k) \in \mathcal{U}$ であるとする.

$$\begin{aligned}
j(\gamma_j, z) &= U(\gamma_j)\mathrm{exp}\left\{ \frac{1}{r}R(z, \gamma_j) + \frac{1}{2r}R(\gamma_j, \gamma_j) \right\}, \\
j(\gamma'_k, z) &= U(\gamma'_k)\mathrm{exp}\left\{ \frac{1}{r}R(z, \gamma'_k) + \frac{1}{2r}R(\gamma'_k, \gamma'_k) \right\}, \\
\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} &= d - \frac{1}{r} dz^t R\bar{z} \cdot I_r - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r}\mu^t (T - \bar{T})^{-1} dz \cdot I_r + \frac{\mathbf{i}}{2\pi r}\bar{\mu}^t (T - \bar{T})^{-1} dz \cdot I_r.
\end{aligned}$$

その同型射を具体的に構成することによって実際に $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ となることを証明したのが次の定理であり, 本稿における主結果の 1 つである ([5], Theorem 3.6).

定理 3.3. $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ であり, その同型射 $\Phi : E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の局所表示は以下で与えられる. ただし, $\mathcal{A} := \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \bar{T}^t A^t (T-\bar{T})^{-1}$ であるとする.

$$\Phi(z,\bar{z}) = \exp\left\{ \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} z^t \mathcal{A} z + \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} \bar{z}^t \bar{\mathcal{A}} \bar{z} - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \mathcal{A} \bar{z} + \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} \bar{z}^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \mu - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \bar{\mu} \right\} \cdot I_r.$$

以下, 定理 3.3 の証明の概略を述べる. まず, 微分方程式 $\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \Phi(z,\bar{z}) = \Phi(z,\bar{z}) \nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を解く. この微分方程式を解くことによって得られる解が上述の $\Phi(z,\bar{z})$ であるから, この $\Phi(z,\bar{z})$ を用いて

$$\Big(\Phi(z+\gamma_j, \bar{z}+\gamma_j)\Big)\Big(e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j y} V_j\Big)\Big(\Phi^{-1}(z,\bar{z})\Big), \ \Big(\Phi(z+\gamma'_k, \bar{z}+\bar{\gamma'_k})\Big)\Big(U_k\Big)\Big(\Phi^{-1}(z,\bar{z})\Big)$$

を計算し (以下の可換図式, 及び (2), (3) も参照せよ), それぞれが実際に $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の保型因子 $j(\gamma_j, z)$, $j(\gamma'_k, z)$ の形に変形されることを確認すればよい.

$$\begin{array}{ccc}
E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j y} V_j} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
{\scriptstyle \Phi(z,\bar{z})} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \Phi(z+\gamma_j, \bar{z}+\gamma_j)} \\
\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow[j(\gamma_j, z)]{} & \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{U_k} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
{\scriptstyle \Phi(z,\bar{z})} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \Phi(z+\gamma'_k, \bar{z}+\bar{\gamma'_k})} \\
\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow[j(\gamma'_k, z)]{} & \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}.
\end{array}$$

次に, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の間の射の写像錐に付随する完全三角系列に対する, シンプレクティック幾何学的な観点から見た解釈について議論する. 以下, 第 3.1 節で説明した DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において話を進める. 特に, $T : Tr(DG_{\check{T}^{2n}}) \to Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ は $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ におけるシフト関手を表すものとする (n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ の複素構造を定義する際にも T という記号を用いたが, 混乱することはないと思われるので同じ記号を用いて書くことにする). 次の定理が本稿における 2 つ目の主定理である ([5], Theorem 4.1).

定理 3.4. $\check{T}^{2n}$ 上において 2 つの射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$, $E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ $(\mu = p + T^t q,\ \nu = u + T^t v)$ をとり, $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において射 $\psi : E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \to TE_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の写像錐 $C(\psi)$ に付随する完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \xrightarrow{\psi} TE_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow \cdots \tag{6}$$

を考える. このとき, ある射影的平坦束 $E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ が存在して $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ となる, すなわち, (6) が 3 つの射影的平坦束とその次数シフトから成る完全三角系列となるならば, $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) \leq 1$ が成り立つ.

以下, 定理 3.4 の証明の概略を述べる. 簡単のため, $\alpha := \frac{1}{r}A - \frac{1}{s}B$, $\beta := \frac{1}{s}u - \frac{1}{r}p$ とおく. $\alpha = O$ の場合には, $\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^n$ であれば $L_{(r,A,p)} = L_{(s,B,u)}$ となって $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) = 0$,

$\beta \notin 2\pi\mathbb{Z}^n$ であれば $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} = \emptyset$ となるだけなので, 以下 $\alpha \neq O$ とする. このとき, $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ であると仮定しているので, ホモロジー的ミラー対称性 [3] を用いることにより $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} \neq \emptyset$ となることが確認できる. 関係式

$$-\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cdot I_r,\ -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} = \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \cdot I_s,\ -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(t,C,\eta,\mathcal{W})} = \Omega'_{(t,C,\eta,\mathcal{W})} \cdot I_t$$

によって定まる 2 次微分形式 $\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}, \Omega'_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ をとる. また, $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ より, $C(\psi)$ と $E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ の i 次のチャーン指標は一致するはずである. したがって, ベクトル束 E の i 次のチャーン指標を $ch_i(E)$ と書くことにすれば

$$ch_i(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}) + ch_i(E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) = ch_i(E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}) \tag{7}$$

が成り立つ. 特に, $i = 0, 1, 2$ の場合の等式 (7) を書き換えることによって

$$(\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \wedge (\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) = 0 \tag{8}$$

という等式を得ることができ, これが成り立つ場合には $i \geq 3$ の場合の関係式 (7) は自動的に満たされる. さらに,

$$\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} = \frac{1}{4\pi^2} dx^t \alpha^t dy$$

であることを考慮すると, 等式 (8) が成り立つことと, n 次正方行列 α から任意に 2 行 2 列を抜き出して得られる 2 次正方行列の行列式が 0 になることが同値であることが分かる. したがって, この事実と $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} \neq \emptyset$ となることをふまえて連立方程式 $\alpha\check{x} = \beta$ を解くことにより, $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) = 1$ となることが証明できる.

最後に, 1 つだけこの定理 3.4 に関する具体例を述べる. ミラー対として $((T^2, \tilde{\omega} = -\frac{1}{T}dx^1 \wedge dy^1), \check{T}^2 = \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z}))$, $T \in \mathbb{H}$ をとり, 以下のような写像錐に付随する完全三角系列を考える. ただし, $\psi \neq 0$ であるとし, また, $E_{(1,0,\mu,\mathcal{U})}, E_{(1,1,\nu,\mathcal{V})}$ はそれぞれ次数 0, 1 の正則直線束であって, $\mu = p + qT$, $\nu = u + vT$, $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{V_1 = 1,\ U_1 = 1 \in U(1)\}$ となっているようなものとする.

$$\cdots \longrightarrow E_{(1,0,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E_{(1,1,\nu,\mathcal{V})} \xrightarrow{\psi} TE_{(1,0,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow \cdots.$$

このとき $C(\psi)$ は階数 2, 次数 1 の正則ベクトル束であり, 実際に $C(\psi) \cong E_{(2,1,\eta,\mathcal{W})}$ となることと $\eta \equiv \mu + \nu + \pi + \pi T \pmod{2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})}$ となることが同値であることが証明されている ([4], Theorem 4.10). ここで,

$$\mathcal{W} = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in U(2) \right\}$$

である. このような状況下において, 確かに $\mathrm{codim}(L_{(1,0,p)} \cap L_{(1,1,u)}) = 1$ が成り立っている.

参考文献

[1] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik 70:93-107, 1991.

[2] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies, In: Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993). Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).

[3] K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions, J. Algebr. Geom. 11, 393-512 (2002).

[4] K. Kobayashi, On exact triangles consisting of stable vector bundles on tori, Differential Geometry and its Applications 53 (2017) 268-292, arXiv : mathDG/1610.02821.

[5] K. Kobayashi, Geometric structure of exact triangles consisting of projectively flat bundles on higher dimensional complex tori, arXiv : mathDG/1705.04007.

[6] K. Kobayashi, Some remarks on the homological mirror symmetry for tori, In preparation.

[7] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Princeton University Press, 1987.

[8] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, 1995, pages 120-139, arXiv : math.AG/9411018.

[9] Y. Matsushima, Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J., Vol. 61(1976), 161-195.

[10] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror Symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, 479:243-259, 1996.

[11] Jae-Hyun Yang, Holomorphic vector bundles over complex tori, J. Korean Math. Soc. 26(1989), No.1, pp.117-142.