

# 4次元双曲理想コクセター多面体の構成と増大度

雪田 友成 (Yukita Tomoshige)  
(早稲田大学教育学研究科)

## 1 序論

$\mathbb{H}^d$  を  $d$ 次元双曲空間の上半空間モデルとして  $\mathbb{H}^d$  を  $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  における閉包とする. 体積有限な凸多面体  $P \subset \mathbb{H}^d$  が**双曲コクセター多面体**であるとは, 面角が2以上の自然数  $k$  を用いて  $\frac{\pi}{k}$  と表されることである. 双曲コクセター多面体  $P$  のファセットに関する鏡映の全体  $S$  により生成される離散群  $\Gamma$  を**双曲コクセター群**といい,  $(\Gamma, S)$  を  $P$  に関するコクセター系という. このとき  $P$  は  $\Gamma$  の基本領域である.  $P$  がコンパクト (または非コンパクト) のとき, 対応する双曲コクセター群  $\Gamma$  はコンパクト (または余体積有限) と言われる. このとき  $(\Gamma, S)$  の  $S$  に関する語の長さの球面的増大度を考える. すなわち,  $a_l$  を  $S$  に関する語の長さが  $l$  である  $\Gamma$  の元の個数として,  $\tau_\Gamma := \limsup_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{a_l}$  が  $(\Gamma, S)$  の球面的増大度であり, これをコクセター系  $(\Gamma, S)$  の増大度という. Cauchy-Hadamard の定理から, 形式的べき級数  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l t^l$  の収束半径を  $R$  とすると,  $\tau = \frac{1}{R}$  となる. このべき級数をコクセター系  $(\Gamma, S)$  の**増大度級数**という. 双曲コクセター多面体  $P$  の増大度と増大度級数とは  $P$  に関するコクセター系の増大度と増大度級数のことである. de la Harpe の結果により, 双曲コクセター多面体の増大度は1より真に大きい実代数的整数となることが知られている [5]. そこで, 次の問題を考える.

双曲コクセター群の増大度はどのような実代数的整数となるか?

本稿では, 2 または 3次元双曲コクセター群についての既存の結果および筆者が得た4次元双曲コクセター群の増大度の計算結果について説明する.

## 2 準備

**定義 1.** (コクセター系, コクセターグラフ, 増大度)

(i) コクセター系  $(\Gamma, S)$  とは群  $\Gamma$  と有限生成系  $S \subset \Gamma$  ( $S = \{s_i\}_{i=1}^N$ ) で関係式が  $(s_i s_j)^{m_{ij}}$  であるものとの組である. ここで,  $m_{ii} = 1$  であり,  $i \neq j$  について  $m_{ij} \geq 2$  または  $m_{ij} = \infty$  である. 但し  $m_{ij} = \infty$  とは  $s_i s_j$  の位数が有限でないことを表すものとする. このとき群  $\Gamma$  をコクセター群という.  $I \subset S$  に対して,  $\Gamma_I$  を  $\{s_i\}_{i \in I}$  により生成される  $\Gamma$  の部分群とする.  $\Gamma_I$  は  $I$  により生成される  $\Gamma$  のコクセター部分群という.

(ii) 次のように構成されるグラフを  $(\Gamma, S)$  のコクセターグラフという:  
頂点集合は  $S$  である.  $m_{ij} \geq 3$  なる  $s_i, s_j \in S$  に対して, 対応する頂点を辺で結ぶ.  $m_{ij} \geq 4$  の時は辺に  $m_{ij}$  とラベルを付けることとする. コクセター系  $(\Gamma, S)$  について, 対応するコクセターグラフが連結であるとき既約であるという.

(iii) コクセター系  $(\Gamma, S)$  の増大度級数  $f_S(t)$  とは形式的べき級数  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l t^l$  である, ここで  $a_l$  は  $S$  に関する語の長さが  $l$  である  $\Gamma$  の元の個数である.  $\tau = \limsup_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{a_l}$  をコクセター系  $(\Gamma, S)$  の

増大度という.

**定義 2.** (双曲多面体)

$P \subset \mathbb{H}^d$  が双曲多面体であるとは, 有限個の閉半空間の共通部分として表されることである. すなわち,  $H_i^-$  を  $\mathbb{H}^d$  内の超平面  $H_i$  により囲まれる閉半空間とすれば  $P = \cap H_i^-$ .

双曲多面体  $P$  を囲む超平面  $H_i, H_j$  が  $\mathbb{H}^d$  において  $H_i \cap H_j \neq \emptyset$  であるとき, 次のようにして  $H_i$  と  $H_j$  のなす面角を定める: 点  $x \in H_i \cap H_j$  を一つ取り,  $x$  を始点とする  $P$  に対する外法線ベクトルを  $u_i, u_j$  とする. このとき,  $H_i$  と  $H_j$  のなす面角  $\theta \in [0, \pi)$  とは  $\cos \theta = -(u_i, u_j)$  を満たすものである. ここで  $(\cdot, \cdot)$  は  $\mathbb{R}^d$  におけるユークリッド内積である.

また  $H_i, H_j$  が理想境界  $\partial\mathbb{H}^d$  でのみ交点を持つときは,  $H_i, H_j$  のなす面角は 0 とする.

**定義 3.** (双曲コクセター多面体)

体積有限な双曲多面体  $P \subset \mathbb{H}^d$  が双曲コクセター多面体であるとは, 面角が 2 以上の自然数  $k$  または  $k = \infty$  を用いて  $\frac{\pi}{k}$  と表されることである. ここで  $k = \infty$  とは対応する二つの超平面が理想境界  $\partial\mathbb{H}^d$  でのみ交点を持つことである.

双曲多面体  $P$  が体積有限となる必要十分条件は,  $P$  が  $\mathbb{H}^d$  の有限個の点の凸包であることを注意しておく. 双曲コクセター多面体  $P \subset \mathbb{H}^d$  のファセットを定める超平面に関する鏡映の全体  $S$  は離散群  $\Gamma$  を生成する. このとき  $(\Gamma, S)$  はコクセター系となり, これを  $P$  に関する双曲コクセター系といい,  $\Gamma$  を  $d$  次元双曲コクセター群という. さらに,  $P$  がコンパクト (または非コンパクト) のとき, 対応する双曲コクセター群  $\Gamma$  はコンパクト (または余体積有限) と言われる.

**定理 1.** (Solomon の公式)[12]

既約有限コクセター系  $(\Gamma, S)$  の増大度級数は  $f_S(t)$  は  $f_S(t) = [m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_p + 1]$  と表される. ここで  $[n] = 1 + t + \dots + t^{n-1}$ ,  $[m, n] = [m][n]$  であり,  $\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$  はコクセター系  $(\Gamma, S)$  の指数と呼ばれるものである.

表 1 は既約有限コクセター系の指数を表したものである (詳細は [6] を参照).

表 1 指数

既約有限コクセター群	指数	増大度級数
$A_n$	$1, 2, \dots, n$	$[2, 3, \dots, n + 1]$
$B_n$	$1, 3, \dots, 2n - 1$	$[2, 4, \dots, 2n]$
$D_n$	$1, 3, \dots, 2n - 3, n - 1$	$[2, 4, \dots, 2n - 2][n]$
$E_6$	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	$[2, 5, 6, 8, 9, 12]$
$E_7$	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	$[2, 6, 8, 10, 12, 14, 18]$
$E_8$	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	$[2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30]$
$F_4$	$1, 5, 7, 11$	$[2, 6, 8, 12]$
$H_3$	$1, 5, 9$	$[2, 6, 10]$
$H_4$	$1, 11, 19, 29$	$[2, 12, 20, 30]$
$I_2(m)$	$1, m-1$	$[2, m]$

**定理 2.** (Steinberg の公式)[13]

$(\Gamma, S)$  を無限コクセター系とする.  $\Gamma_T$  を  $T \subset S$  により生成される部分コクセター群として,  $f_T(t)$  をコクセター系  $(\Gamma_T, T)$  の増大度級数とする.  $\mathcal{F} = \{T \subset S : \Gamma_T \text{ は有限コクセター群}\}$  とする. このとき

$$\frac{1}{f_S(t^{-1})} = \sum_{T \in \mathcal{F}} \frac{(-1)^{|T|}}{f_T(t)}.$$

Solomon の公式と Steinberg の公式により,  $(\Gamma, S)$  の増大度級数は整係数有理関数  $\frac{p(t)}{q(t)}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}[t]$ ) として表される. この有理関数  $\frac{p(t)}{q(t)}$  は  $(\Gamma, S)$  の増大度関数と呼ばれる. 増大度級数  $f_S(t)$  の収束半径  $R$  は  $q(t)$  の絶対値最小である正の実根に等しい. このことから, 双曲コクセター群の増大度の数論的性質は増大度関数の分母多項式の根の分布を調べることでわかる.

### 3 既存の結果

ここでは, 双曲コクセター群の増大度に関して知られている結果を紹介する.

#### 3.1 2次元双曲コクセター群について

**定理 3.** (Cannon and Wagreich [2]) コンパクト双曲コクセター三角形の増大度は Salem 数である. ここで1より大きな実代数的整数  $\tau$  が Salem 数であるとは,  $\tau^{-1}$  が  $\tau$  の共役根であり,  $\tau$  以外の共役根が単位円周上に存在することである (図1 参照).

**定理 4.** (Floyd and Plotnick [4], Parry [11]) 任意のコンパクト双曲コクセター多角形の増大度は Salem 数である.

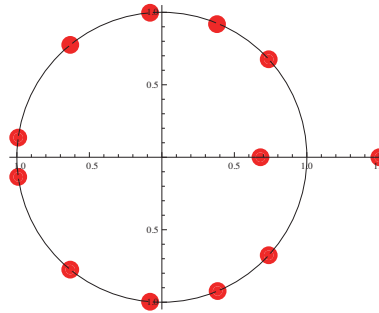


図1 Salem 数

**定理 5.** (Floyd [3]) 任意の非コンパクト双曲コクセター多角形の増大度は Pisot-Vijayaraghavan 数である. ここで1より大きな実代数的整数  $\tau$  が Pisot-Vijayaraghavan 数であるとは,  $\tau$  以外の共役根が単位開円盤内に存在することである (図2 参照).

#### 3.2 3次元双曲コクセター群について

**定理 6.** (Parry [11]) 任意のコンパクト双曲3次元コクセター多面体の増大度は Salem 数である.

**定理 7.** (Komori and Umemoto [9]) 非コンパクト双曲コクセター四面体の増大度は Perron 数であ

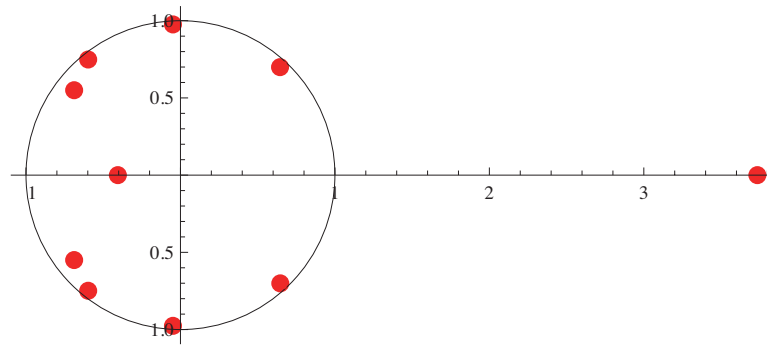


図2 Pisot 数

る. ここで1より真に大きな実代数的整数  $\tau$  が Perron 数であるとは,  $\tau$  以外の共役根の絶対値が  $\tau$  より真に小さいことである (図3参照).

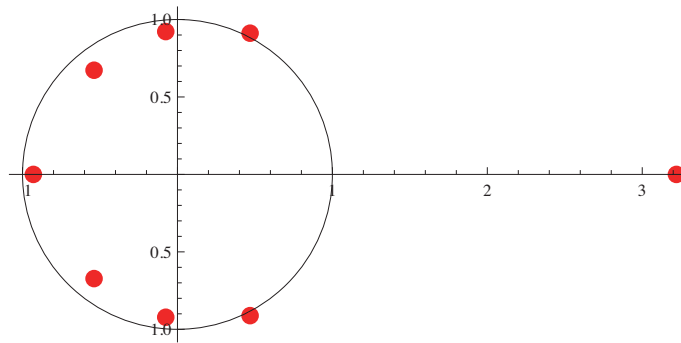


図3 Perron 数

**定理 8.** (Nonaka and Kellerhals [7], Komori and Yukita [10]) 任意の3次元理想双曲コクセター多面体の増大度は Perron 数である. ここで理想双曲コクセター多面体とは, 全ての頂点が理想境界  $\partial\mathbb{H}^3$  上に存在するものである.

**定理 9.** (Yukita [16], [17]) 任意の非コンパクト3次元双曲コクセター多面体の増大度は Perron 数である.

ここまでの結果をまとめたものが表2である.

表2 増大度の既存の結果

次元	非コンパクト	コンパクト
2	Pisot	Salem
3	Perron	

## 4 主結果

筆者が4次元双曲コクセター群について得た結果を紹介する.

**定理 10.** (Tumarkin [14]) 次のコクセターグラフを持つ 4次元理想双曲コクセター多面体が存在する. この理想双曲コクセター多面体は底面を立方体とするピラミッドの組み合わせ構造を持つ (図 4 参照).

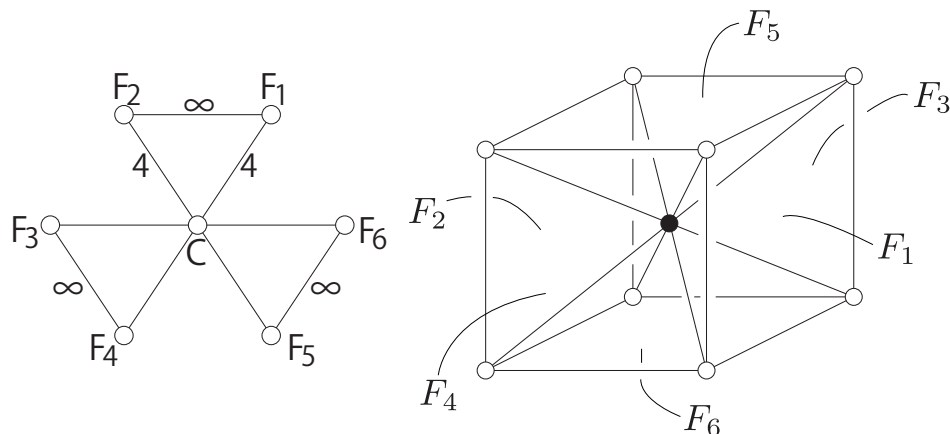


図 4 コクセターグラフと対応する多面体の Schlegel 図式

**定理 11. (主結果)** 上のコクセターグラフを持つ 4次元理想双曲コクセター多面体を  $F_1, F_2$  に対応するファセットで貼り合わせるにより 4次元双曲理想コクセター多面体の無限族を構成できる. さらに, この貼り合わせにより得られる多面体の増大度は Perron 数となる.

ここで次のことに注意したい:

- コンパクトな 4次元双曲コクセター多面体の族は T.Zerht and C.Zehrt [18] の Coxeter garland や Umemoto [15] の Coxeter domino など知られている例が存在する. 一方で非コンパクト 4次元双曲理想コクセター多面体の無限族の例は今回得られたものが最初の例である.
- 4次元双曲コクセター多面体の増大度について, コンパクトな場合に Kellehals and Perren [8] による数値計算の結果, Umemoto [15] による Coxeter domino の内のある部分族の増大度が 2-Salem 数となることなどが知られている. 非コンパクト 4次元の場合における無限族の増大度の数論的性質についての結果もまた今回得られたものが最初の結果である.
- 4次元以上の双曲コクセター群の増大度の計算において, 難しい点は 2点存在している. 一つは, 2 または 3次元の場合と異なり双曲空間内にコクセター多面体として実現可能な多面体の組み合わせ構造が決定されていない点である (例えば, 3次元の場合には Andreev の定理 [1] により組み合わせ構造から実現できる面角を決定できる). 二つ目は増大度関数の分母多項式の複雑さである, 特に次数が高くなるのが計算を難しくしている.

## 謝辞

研究会「第 14 回数学総合若手研究会」において講演の機会をくださった世話人の方々に心より感謝申し上げます. 本研究は科研費 (課題番号:17J05206) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] E. M. Andreev, On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskij space, Mat. Sb., Nov. Ser. **83** (1970), 256-260. English transl.: Math. USSR, Sb. **12** (1971), 255-259.
- [2] J. W. Cannon and P. Wagreich, Growth functions of surface groups, Math. Ann. **293** (1992), 239-257.
- [3] W. J. Floyd, Growth of planer Coxeter groups, P.V. numbers, and Salem numbers, Math. Ann. **293** (1992), 475-483.
- [4] W. J. Floyd and S. P. Plotnick, Symmetries of Planar growth functions, Invent Math **93** (1988), 501-543.
- [5] P. de la Harpe, Groupes de Coxeter infinis non affines, Exposition. Math **5** (1987), 91-96.
- [6] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [7] J. Nonaka and R.Kellerhals, The growth rates of ideal Coxeter polyhedra in hyperbolic 3-space, To appear in Tokyo Journal of Mathematics.
- [8] R. Kellerhals and G. Perren, On the growth of cocompact hyperbolic Coxeter groups, European J. Combin. **32** (2011), no. 8, 1299-1316.
- [9] Y. Komori and Y. Umemoto, On the growth of hyperbolic 3-dimensional generalized simplex reflection groups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume **88**, Number 4 (2012), 62-65.
- [10] Y. Komori and T. Yukita, On the growth rate of ideal Coxeter groups in hyperbolic 3-space, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume **91**, Number 10 (2015), 155-159.
- [11] W. Parry, Growth series of Coxeter groups and Salem numbers, J. Algebra **154** (1993), 406-415.
- [12] L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups, J. Algebra **3**(1966), 376-393.
- [13] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [14] P.V.Tumarkin, Hyperbolic Coxeter n-polytopes with  $n + 3$  facets, Trans. Moscow. Math. Soc. (2004), 235-250.
- [15] Y.Umemoto, The growth function of Coxeter dominoes and 2-salem numbers, Algebr.Geom.Topol. **14** (2014), no.5, 2721-2746.
- [16] T.Yukita, On the growth rates of cofinite 3-dimensional hyperbolic Coxeter groups whose dihedral angles are of the form  $\frac{\pi}{m}$  for  $m = 2, 3, 4, 5, 6$ , To appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
- [17] T.Yukita, Growth rates of 3-dimensional hyperbolic Coxeter groups are Perron numbers, To appear in Canadian Mathematical Bulletin.
- [18] T.Zehrt and C.Zehrt, The growth function of Coxeter garlands in  $\mathbb{H}^4$ , Beitr. Algebra Geom. **53** (2012), 451-460.