境界付き有向曲面のトレリ群の写像類群内での歪み度について

久野恵理香 (Erika KUNO)　(埼玉大学)*

1. 幾何学的群論の導入

本稿では，群とは特に何も断らない限り，有限生成群のみを扱うこととする．群からグラフという幾何学的対象を構成し，群に幾何学的な情報を与えることによって群の性質を解明するものが，幾何学的群論である．まず，群からグラフを構成する方法から説明する．

1.1. ケーリーグラフ

G を有限生成群とする．S を G の有限生成系の1つとする．次の方法でグラフ $\Gamma(G,S)$ を構成する．

- 頂点集合 $V(\Gamma(G,S)) = G$
- 辺集合 $E(\Gamma(G,S)) = \{(g,ga) | g \in G, a \in S\}$

このグラフ $\Gamma(G,S)$ を**ケーリーグラフ**と呼ぶ．

例 **1.1.** $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$

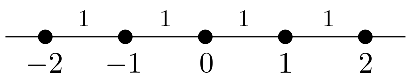


図 1: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$ のケーリーグラフ.

例 **1.2.** $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1, 2\}$

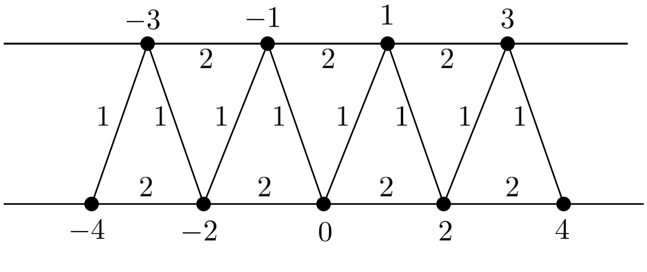


図 2: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1, 2\}$ のケーリーグラフ.

本研究は大森源城氏との共同研究である．
キーワード：写像類群, トレリ群, subgroup distortion
* 〒 338-8570　埼玉県さいたま市桜区下大久保 255　埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報部門数理領域数学コース

1.2. 幾何学的群論における問題

(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする．

定義 1.3. φ を X から Y への写像とする．写像 φ が擬等長的埋め込みであるとは，ある定数 $\lambda \geq 1$ が存在して，全ての $x, x' \in X$ に対して，次の不等式が成り立つことである: $\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - \lambda \leq d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \lambda$. 写像 φ が擬稠密であるとは，ある定数 $\lambda \geq 0$ が存在して，各 $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ が存在して $d_Y(\varphi(x), y) \leq \lambda$ が成り立つことである．写像 φ が擬等長写像であるとは，それが擬等長的埋め込みかつ擬稠密であることである．そして X は Y と擬等長的であるといい，$X \sim Y$ とかく．

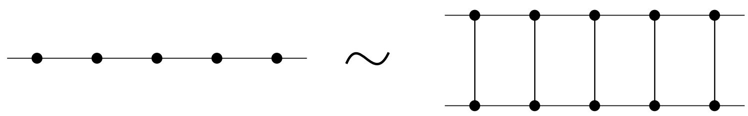
定義 1.4. 2つの群 G と G' が擬等長的である $(G \sim G')$ とは，それらのケーリーグラフ $\Gamma(G, S)$ と $\Gamma(G', S')$ が擬等長的であることである．但し，S, S' はそれぞれ G, G' の生成系の1つである．

定理 1.5. G を有限生成群とし，S と S' を G の異なる有限生成系とする．このとき，$\Gamma(G, S)$ と $\Gamma(G, S')$ は擬等長的である．

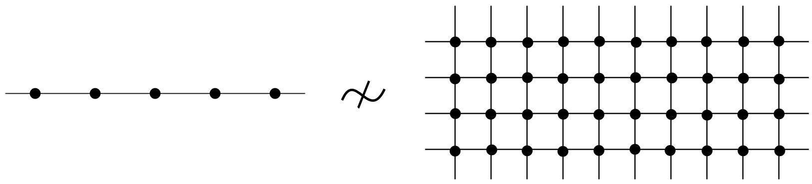
幾何学的群論における問題の1つとして，以下がある．

問題 1.6. 群を擬等長により分類したい．

例 1.7. $G = \mathbb{Z}$ と $G' = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ は擬等長的である．



例 1.8. $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は擬等長的でない．



問題 1.6 を解くための足がかりの1つとして，次の章において紹介する，有限生成群とその有限生成部分群の間の "歪み度" という概念がある．

2. 歪み度とは何か

2.1. 定義

G を有限生成群とし，その語距離を $\| \cdot \|_G$ とする．K を G の任意の有限生成部分群とする．このとき，K は自身の語距離 $\| \cdot \|_K$ を持つ．語距離 $\| \cdot \|_K$ を $\| \cdot \|_G$ と比較することは，幾何学的群論において基本的でかつ重要な問題である．一般に，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $k \in K$ に対して $\| k \|_G \leq C \| h \|_K$ が成り立つ．そこで問題となるのは，この逆の不等式がいつ成り立つのかということである．すなわち，$\| k \|_K \leq \delta(\| k \|_G)$ を満たす最小の関数 $\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は何であるか，という問題である．ここで，関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が，関数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ より小さいとは，ある定数 $N \in \mathbb{N}$ が存

在して，全ての $n \geq N$ に対して，$f(n) \leq g(n)$ が成り立つことである．それを定式化したものが歪み度である．ここで歪み度の定義を，Hamanstät-Hensel [3] に従って述べる．

定義 2.1. G を有限生成群とする．K を G の任意の有限生成部分群とする．このとき，K の G における **歪み度**が δ であるとは，以下の2つの条件を満たすことである．

(1) ある定数 $C, C' > 0$ が存在して任意の $k \in K$ に対して $\| k \|_K \leq C\delta(\| k \|_G) + C'$ が成り立つ．これを，K の G における歪み度は，**高々** δ であると言う．

(2) ある K の元の列 $\{k_i\}$ $(k_i \in K)$ が存在して，k_i の語距離は，G においては線形に伸び，K においては δ に伸びる．これを，K の G における歪み度は，**少なくとも** δ であると言う．

また，K の G における歪み度が線形であるとき，K は G において**歪んでいない**という．

注意 2.2. 歪み度は通常，線形関数の差を除いて研究される．よって δ の growth type は有限生成群の生成系の取り方に依存しない．

2.2. 先行研究について

ここで，本研究に関わる先行研究について紹介する．まず，必要な定義から説明する．本稿では，$S = S_{g,b}$ を種数 g, 境界成分数 b の連結コンパクト向き付け可能曲面とする．

定義 2.3. (1) $S_{g,b}$ の**写像類群** $\mathcal{M}_{g,b}$ とは，$S_{g,b}$ 上の向きを保ち，境界成分上恒等写像である同相写像のアイソトピー類からなる群である.

(2) $S_{g,b}$ $(b = 0, 1)$ の**トレリ群** $\mathcal{I}_{g,b}$ とは，準同型 $\Phi_0\colon \mathcal{M}_{g,b} \to \mathrm{Aut}(H_1(S_{g,b}; \mathbb{Z}))$ の核である.

(3) $S_{g,b}$ $(b \geq 2)$ の**トレリ群** $\mathcal{I}_{g,b}$ とは，$\mathcal{I}_{g,b} = i_*^{-1}(\mathcal{I}_{g,0})$ である, ただし $i_*\colon \mathcal{M}_{g,b} \to \mathcal{M}_{g,0}$ は自然な包含写像 $i\colon S_{g,b} \to S_{g,0}$ から誘導される全射準同型である.

(4) S の**レベル d 写像類群** $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ $(b = 0, 1)$ とは，準同型 $\Phi_d\colon \mathscr{M}_{g,b} \to \mathrm{Aut}(H_1(S_{g,b}; \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}))$ の核である.

注意 2.4. 境界成分数が2以上の曲面に対するトレリ群の定義はいくつかある (Putman [4] を見よ) が，定義 2.3 におけるトレリ群は有限生成である．

2011年に，Broaddus-Farb-Putman [1] が，向き付け可能曲面で境界成分数が高々1であるものに対して，そのトレリ群の写像類群における歪み度を計算した:

定理 2.5. ([1]) 種数 $g \geq 3$，境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，少なくとも指数的であり，高々二重指数的である．

そして，2017年の Cohen [2] の以下の結果により，境界成分数が高々1である向き付け可能曲面のトレリ群の，その写像類群における歪み度が完全に決定された．

定理 2.6. ([2]) 種数 $g \geq 3$，境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，高々指数的である．

3. 主結果

この章では，自身の研究結果について報告する．Broaddus-Farb-Putman [1] と Cohen [2] により，向き付け可能曲面で境界成分数が高々1であるものに対しては，そのトレリ群の写像類群における歪み度は計算された．しかし，境界成分数が2以上の向き付け可能曲面に対しては，それが未解決であった．そこでこの問題に取り組み，私たちは以下のような解答を得た．

定理 3.1. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b \geq 2$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，少なくとも指数的である．

また，境界成分数が高々1の向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群のレベル d 写像類群における歪み度について，以下の解答を与えた．

定理 3.2. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ における歪み度は，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度と一致する．よって，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ における歪み度は指数的である．

定理 3.1 は，Broaddus-Farb-Putman [1] の，トレリ群の写像類群における歪み度の，下からの評価を求める議論を追うことで証明できる．定理 3.2 は，$\mathscr{M}_{g,b}[d]$ が $\mathscr{M}_{g,b}$ と擬等長的であることを主に使い，証明できる．尚，定理 3.1 と定理 3.2 は，ともに大森源城氏との共同研究である．

今後は，以下の問題を解決することを目標とする．

問題 3.3. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b \geq 2$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，高々指数的であるか?

謝辞

研究集会「第14回数学総合若手研究集会」での講演の機会を与えてくださった世話人の方々に心より感謝申し上げます. また, 日頃から丁寧にご指導をしてくださる東京工業大学の遠藤久顕先生には大変感謝しております。

参考文献

[1] N. Broaddus, B Farb, and A. Putman, *Irreducible Sp-representations and subgroup distortion in the mapping class group*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 3, 537–556.

[2] D. B. Cohen, *The Dehn function of* $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{Z})$, arXiv:1404.7412.

[3] U. Hamenstädt and S. Hensel, *The geometry of the handlebody groups I: Distortion*, J. Topol. Anal. **4** (2012), no. 1, 71–97.

[4] A. Putman, *Cutting and pasting in the Torelli group*, Geom. Topol. **11** (2007), 829–865.