# Isoperimetric Rigidity and Distributions of 1-Lipschitz Functions

中島 啓貴　(Hiroki Nakajima)*

**概　要**

我々は，isoperimetric profile による以下のような剛性定理を得た．isoperimetric profile による比較条件を満たす測地的な測度距離空間のあるクラスを考えると，そのクラスの中で observable variance が最大になっている空間は，分散を最大にする 1-リプシッツ関数によって分割され，位相的に大きく 3 種類の構造を持つ．この結果は，Cheng の最大直径定理や Cheeger-Gromoll の分離定理の変化形の一つといえる．本研究は，東北大学の塩谷隆氏との共同研究である．

## 1. 導入

距離空間 $(X, d_X)$ と $X$ 上の測度 $\mu_X$ に対して，三つ組 $(X, d_X, \mu_X)$ を測度距離空間と呼ぶ．$X$ が測度距離空間であると言ったとき，その距離を $d_X$，測度を $\mu_X$ で表す．測度距離空間上の等周不等式を反映する isoperimetric profile と呼ばれる関数が定まる．

**Definition 1.1 (Isoperimetric Profile)** 任意のボレル集合 $A \subset X$ に対して、$A$ の境界測度を

$$\mu_X^+(A) := \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mu_X(A_\varepsilon) - \mu_X(A)}{\varepsilon}$$

と定める．ここで，$A_\varepsilon$ は $A$ の $\varepsilon$-開近傍である．$X$ の isoperimetric profile $I_X$ を実数 $v \in \mathrm{Im}\, \mu_X = \{\mu_X(A) \mid A \subset X \text{ ボレル集合}\}$ に対して

$$I_X(v) := \inf\{\, \mu_X^+(A) \mid \mu_X(A) = v \,\}$$

と定義する．

$X$ の isoperimetric profile $I_X$ は $X$ のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}_X$ と関係がある．実際，実数 $K$ に対してある関数 $\tilde{I}_K$ が定まって

$$\mathrm{Ric}_X \geq K \Rightarrow I_X \geq \tilde{I}_K$$

が成り立つ．一方，よく知られた剛性定理として，Cheng の最大直径定理

$$\mathrm{Ric}_X \geq n-1, \mathrm{diam}\, X = \pi \Rightarrow X = S^n(1) \text{ (等長同型)}$$

や Cheeger-Gromoll の分裂定理

$$\mathrm{Ric}_X \geq 0, \exists \text{a straight line in } X \Rightarrow X = \exists Y \times \mathbb{R} \text{ (等長同型)}$$

がある．ここで，$X$ は $n-1$ 次元完備リーマン多様体である．我々の研究は，これらの剛性定理の仮定 $\mathrm{Ric}_X \geq K$ よりも弱い条件である，ある関数 $\varphi$ に対して $I_X \geq \varphi$ が成り立つという条件のもと，ある種の最大性を仮定することで空間 $X$ の構造の剛性を得るものである．

---

2010 Mathematics Subject Classification: 53C23,53C20
キーワード：metric measure space, isoperimetric inequality
* 〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6-3 東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `hiroki.nakajima.s4@dc.tohoku.ac.jp`

## 2. 設定

我々は，測度距離空間 $X$ において $(X, d_X)$ が完備可分距離空間で $X$ 上の測度 $\mu_X$ はボレル確率測度であることを仮定する．また，主定理における空間 $X$ に対する重要な仮定として，本質的連結性がある．

**Definition 2.1 (本質的連結性)** 測度距離空間 $X$ が**本質的に連結**であるとは任意の閉集合 $A \subset X$ で $0 < \mu_X(A) < 1$ を満たすものに対し，$\mu_X^+(A) > 0$ が成り立つことである．

ここで，主定理における主要な仮定である等周比較条件について述べる．これは，$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 $\nu$ に対して，$(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu)$ の isoperimetric profile を $I_\nu$ としたとき，$I_X \geq I_\nu$ が成り立つことよりも少し強い仮定である．以下，$\nu$ を $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度でルベーグ測度に関して絶対連続かつサポートが連結であると仮定する．

**Definition 2.2 (等周比較条件 IC($\nu$))** $X$ が**等周比較条件** $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たすとは

$$I_X \circ V \geq V' \quad \text{a.e. on } V^{-1}(\mathrm{Im}\, \mu_X)$$

が成り立つことで定義する．ここで $V(t) := \nu((-\infty, t])$ は $\nu$ の分布関数である．

また，主定理において，空間の大きさはオブザーバブル分散という不変量を用いて測る．いま，関数 $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を狭義単調増加な連続関数とする．可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の $\lambda$-分散を

$$\mathrm{Var}_\lambda(f) := \int_{X \times X} \lambda(|f(x) - f(x')|) d(\mu_X \otimes \mu_X)(x, x') \leq \infty$$

と定義する．また，$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 $\eta$ の $\lambda$-分散を

$$\mathrm{Var}_\lambda(\eta) := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \lambda(|x - x'|) d(\eta \otimes \eta)(x, x') \leq \infty$$

と定める．$X$ のオブザーバブル $\lambda$-分散を

$$\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) := \sup\{\, \mathrm{Var}_\lambda(f) \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ 1-リプシッツ} \,\}$$

と定義する．

## 3. 主定理

**Theorem 3.1** $X$ を本質的に連結な測地的測度距離空間とし，$\mathrm{Var}_\lambda(\nu) < \infty$ と仮定する．さらに，$X$ は $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たすと仮定する．このとき，$\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) \leq \mathrm{Var}_\lambda(\nu)$ が成立する．等号が成立するとき，$X$ は以下のいずれかを満たす．

(1) $X$ はある二点を結ぶ最短線の族で覆われる．

(2) $X$ はある一点から出発する半直線の族で覆われる．

(3) $X$ はある直線の族で覆われて，それらの直線は分岐点のみで交わる．

主定理 (定理 3.1) の証明においては以下のリプシッツ順序が重要な役割を果たす．

**Definition 3.2 (リプシッツ順序)** 二つの $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 $\eta, \eta'$ に対して $\eta'$ が $\eta$ を支配する，記号で $\eta \prec \eta'$ とは，ある 1-リプシッツ関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して $h_*\eta' = \eta$ を満たすことである．ここで $h_*\eta'$ は $h$ による $\eta'$ の押し出し測度である．

主定理は以下の二つの定理から得られる．

**Theorem 3.3** $X$ を本質的に連結で $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たす測度距離空間とする．このとき，任意の 1-リプシッツ関数 $\varphi$ に対して $\varphi_*\mu_X \prec \nu$ が成り立つ．特に $\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) \leq \mathrm{Var}_\lambda(\nu)$ が成り立つ．

定理 3.3 については弱い形の主張が M. Gromov によって証明なしに述べられていた [2]．

**Theorem 3.4** $X$ を測地的な測度距離空間とする．もし，1-リプシッツ関数の分布全体の集合 $\{\, \varphi_*\mu_X \mid \varphi : X \to \mathbb{R}$ 1-リプシッツ $\}$ がリプシッツ順序に関して最大元を持つならば，$X$ は定理 3.1 の (1) から (3) のいずれかを満たす．

## 参考文献

[1] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.

[2] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 1, 178–215.

[3] H. Nakajima and T. Shioya, *Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions*, in preparation.