エネルギー汎関数の収束と曲率次元条件の安定性のための新しい条件

数川 大輔 Daisuke Kazukawa (東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

1. 導入

測度距離空間の幾何学は, リーマン多様体の収束理論に由来し, その一般化として研究されてきた. 深谷は [2] で測度距離空間のクラスに測度付き Gromov-Hausdorff 収束 (以下, mGH 収束) を定義し, mGH 収束するコンパクトリーマン多様体の列のラプラシアンの固有値や固有関数の振る舞いを調べた. 測度距離空間が導入された背景として, リーマン多様体の mGH 収束を考えたとき, 極限空間がリーマン多様体の構造を持たないような場合を含んでいるということが挙げられる. 深谷の研究に続き, 加須栄-久村 [6,7] や桑江-塩谷 [9,10] によって, mGH 収束するリーマン多様体の列に対するエネルギー汎関数の収束の研究がなされた.

これらの収束理論が断面曲率や Ricci 曲率の有界性を条件に含むという観点から, 測度距離空間上に曲率の概念を一般化する研究がなされた. 断面曲率を一般化した曲率を持つ空間として, Alexandrov 空間が収束理論以前から知られていた. Lott-Villani と Sturm はそれぞれ独立に [11], [13] によって曲率次元条件と呼ばれる測度距離空間上の Ricci 曲率の下限条件に対応する条件を定義した. 曲率次元条件を満たす空間を CD 空間という. その後, Ambrosio-Gigli-Savaré によって曲率次元条件よりも強いリーマン的曲率次元条件が [1] で定義された. リーマン的曲率次元条件を満たす空間を RCD 空間という. RCD 空間はリーマン多様体のような良いエネルギー解析を行える測度距離空間として広く研究されている.

測度距離空間の収束概念の 1 つとして, Gigli-Mondino-Savaré は [4] で点付き測度付き Gromov 収束 (以下, pmG 収束) を導入した. 彼らは, pmG 収束の下で, 曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束を調べた. pmG 収束は mGH 収束よりも弱い収束であり, より多くの空間列の収束を扱うことができる. しかし, n 次元球面の列 $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ など次元が発散するリーマン多様体列は一般にほとんど収束しないことが知られている.

本研究では, pmG 収束を一般化するためにファイバー制御条件という新しい条件を導入し, 一般化された pmG 収束の下での曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束に関する結果を得た. この一般化により, n 次元球面の列 $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ などもこの理論の例として取り扱うことが可能となった. また, 本研究は, Galaz-García, Kell, Mondino, Sosa [3] による曲率次元条件が測度距離構造を保つ変換群による商空間に引き継がれるという研究の一般化も与えている.

2. 測度距離空間の幾何学

2.1. 曲率次元条件

(X,d,m) が**測度距離空間**であるとは, (X,d) が完備可分距離空間であり, m が X 上の局所有限な Borel 測度で $\operatorname{supp} m = X$ を満たすものであるときをいう. すなわち, m は, 任意の点 $x \in X$ と任意の正数 $r > 0$ に対して, $0 < m(B_r(x)) < \infty$ を満たす X 上の Borel

本研究は特別研究員奨励費（17J02121）の助成を受けたものである.
*e-mail: daisuke.kazukawa.s6@dc.tohoku.ac.jp

測度である．$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(X)$ を X 上の局所有限な Borel 測度全体とし，$\mathscr{P}(X)$ を X 上の Borel 確率測度全体とする．$\mathscr{P}(X)$ の部分集合 $\mathscr{P}_2(X)$ を

$$\mathscr{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathscr{P}(X) \;\middle|\; \text{ある点 } \bar{x} \in X \text{ が存在して，} \int_X d(x, \bar{x})^2 \, d\mu(x) < +\infty \right\} \tag{1}$$

と定め，その上の 2 つの確率測度 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}_2(X)$ の間の L^2**-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \left(\int_{X \times X} d(x, x')^2 \, d\pi(x, x') \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

により定める．ただし，$\Pi(\mu_1, \mu_2) := \{\pi \in \mathscr{P}(X \times X) \mid \mathrm{pr}_{i*}\pi = \mu_i \ (i = 1, 2)\}$ であり，$\mathrm{pr}_i : X \times X \to X$ は各成分への自然な射影，$\mathrm{pr}_{i*}\pi$ は π の pr_i による押し出し測度である．**押し出し測度**とは，一般に Borel 可測写像 $p : X \to Y$ と X 上の Borel 測度 μ に対して，$p_*\mu(\cdot) := \mu(p^{-1}(\cdot))$ により定まる Y 上の Borel 測度 $p_*\mu$ である．$(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ は完備可分距離空間になる．これを L^2**-Wasserstein 空間**という．

相対エントロピー汎関数 $\mathrm{Ent}_m : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ を

$$\mathrm{Ent}_m(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho(x) \log \rho(x) \, dm(x) & (\mu = \rho m \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3}$$

により定める．ただし，$\mu = \rho m$ は μ が m に関して絶対連続であり，その密度関数が ρ であることを意味する．$D(\mathrm{Ent}_m) := \{\mu \in \mathscr{P}(X) \mid \mathrm{Ent}_m(\mu) < +\infty\}$ とする．

測度距離空間における Ricci 曲率の下限条件に対応する曲率次元条件が [11], [13] で次のように定義された．

定義 2.1. 測度距離空間 (X, d, m) が $K \in \mathbb{R}$ に対して**曲率次元条件** $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすとは，任意の 2 つの測度 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X) \cap D(\mathrm{Ent}_m)$ に対して，次を満たす μ_0 と μ_1 を結ぶ W_2 測地線 $\mu : [0, 1] \ni t \mapsto \mu_t \in \mathscr{P}_2(X)$ が存在するときをいう．任意の $t \in [0, 1]$ に対し，

$$\mathrm{Ent}_m(\mu_t) \le (1 - t)\mathrm{Ent}_m(\mu_0) + t\mathrm{Ent}_m(\mu_1) - \frac{K}{2} t(1 - t) W_2(\mu_0, \mu_1)^2 \tag{4}$$

が成り立つ．

ただし，一般に距離空間 (Z, d) 上の曲線 $\gamma : [0, 1] \to Z$ が z と z' を結ぶ (最短) 測地線であるとは，$\gamma(0) = z, \gamma(1) = z'$ を満たし，任意の $s, t \in [0, 1]$ に対して，

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| d(\gamma(0), \gamma(1)) \tag{5}$$

を満たすときをいう．

次の定理は，実際に曲率次元条件がリーマン多様体における Ricci 曲率の下限条件として特徴づけられることを意味している．

定理 2.2 ([12])**.** $K \in \mathbb{R}$ とする．完備リーマン多様体 M に対して，M が $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすことと M の Ricci 曲率の下限が K 以上であることは同値である．ただし，M をリーマン距離 d_g とリーマン体積測度 vol_g をもつ測度距離空間 (M, d_g, vol_g) と考える．

2.2. Cheeger エネルギー汎関数

(X,d,m) を測度距離空間とする．$\mathcal{L}ip(X)$ を X 上の Lipschitz 関数全体とする．

$f \in \mathcal{L}ip(X)$ に対して, f の**局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f| : X \to [0,+\infty)$ を

$$|\nabla f|(x) := \limsup_{x' \to x} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x,x')} \tag{6}$$

で定める．**Cheeger エネルギー汎関数** $\mathrm{Ch} : L^2(X,m) \to [0,+\infty]$ を

$$\mathrm{Ch}(f) := \inf \left\{ \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{2} \int_X |\nabla f_i|^2 \, dm \;\middle|\; f_i \in L^2(X,m) \cap \mathcal{L}ip(X),\ f_i \xrightarrow{L^2} f \right\}. \tag{7}$$

で定める．この定義において, $L^2(X,m)$ の中で $L^2(X,m) \cap \mathcal{L}ip(X)$ が稠密であることから, f の近似列 f_i の存在が保証される．Cheeger エネルギー汎関数はリーマン多様体上の Dirichlet エネルギー汎関数の一般化である．しかし一般に Cheeger エネルギー汎関数は 2 次形式になるとは限らない．

Ambrosio-Gigli-Savaré は [1] で次の条件を定義し, その条件を満たす空間の Cheeger エネルギー汎関数の熱流や対応するラプラシアンの固有値などを研究した．

定義 2.3. 測度距離空間 (X,d,m) が $K \in \mathbb{R}$ に対して**リーマン的曲率次元条件** $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすとは, X が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たし, かつ, Cheeger エネルギー汎関数 Ch が 2 次形式となる, すなわち, 任意の $f,g \in L^2(X,m)$ に対して,

$$\mathrm{Ch}(f+g) + \mathrm{Ch}(f-g) = 2\mathrm{Ch}(f) + 2\mathrm{Ch}(g) \tag{8}$$

を満たすときをいう．

3. ファイバー制御条件と FC 支配

$(X,d_X,m_X), (Y,d_Y,m_Y)$ を測度距離空間とし, $p : X \to Y$ をそれらの間の 1-Lipschitz 写像とする．この節では, ファイバー制御条件という新しい概念を導入する．この条件は後に見るように, 空間 X の幾何学的な条件を空間 Y が引き継ぐための条件である．ファイバー制御条件を定義するために次の測度分解定理から定まる分解測度を用いる．

定理 3.1 (測度分解定理)**.** X 上の任意の Borel 測度 μ で $p_*\mu \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Y)$ を満たすものに対して, 次の (1) - (3) を満たすような X 上の確率測度の族 $\{\mu_y\}_{y\in Y} \subset \mathscr{P}(X)$ が存在する．

(1) 任意の Borel 部分集合 $A \subset Y$ に対して, $Y \ni y \mapsto \mu_y(A) \in [0,1]$ が Borel 可測関数である．

(2) $p_*\mu$-a.e. $y \in Y$ に対し, $\mu_y(X \setminus p^{-1}(y)) = 0$ が成り立つ．

(3) 任意の Borel 可測関数 $f : X \to [-\infty,+\infty]$ に対し,

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Y \int_{p^{-1}(y)} f(x)\, d\mu_y(x) d(p_*\mu)(y) \tag{9}$$

が成り立つ．

さらに, $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ は $p_*\mu$-a.e. に関して一意である. この $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ を μ の p による**分解測度**という.

定義 3.2 (ファイバー制御条件 [8])**.** (X, d_X, m_X) を測度距離空間とし, (Y, d_Y) を完備可分距離空間とする. 1-Lipschitz 写像 $p : X \to Y$ が**ファイバー制御条件** FC を満たすとは, $p_*m_X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Y)$ となり, また, ある Borel 集合 $\tilde{Y} \subset Y$ が存在して, $p_*m_X(Y \setminus \tilde{Y}) = 0$ を満たし, かつ, m_X の p による分解測度の族 $\{\mu_y\}_{y\in\tilde{Y}}$ が $\mathscr{P}_2(X)$ に含まれ, 任意の 2 点 $y, y' \in \tilde{Y}$ に対し,

$$W_2(\mu_y, \mu_{y'}) = d_Y(y, y') \tag{10}$$

が成り立つときをいう.

定義 3.3 (FC 支配 [8])**.** $(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ を測度距離空間とする. X が Y を **FC 支配**するとは, ある 1-Lipschitz 写像 $p : X \to Y$ が存在して, FC と $p_*m_X = m_Y$ を満たすときをいう.

FC 支配の例には次のようなものがある.

例 3.4. $(Y, d_Y, m_Y), (Z, d_Z, m_Z)$ を測度距離空間とする. $1 \le q \le +\infty$ に対して, Y と Z の l_q **直積空間** $Y \times_{l_q} Z$ を,

$$Y \times_{l_q} Z := (Y \times Z, d_{l_q}, m_Y \otimes m_Z) \tag{11}$$

の 3 つ組からなる測度距離空間として定義する. ただし, $m_Y \otimes m_Z$ は m_Y と m_Z の直積測度であり, d_{l_q} は任意の 2 点 $(y, z), (y', z') \in Y \times Z$ に対して,

$$d_{l_q}((y,z),(y',z')) := \begin{cases} (d_Y(y,y')^q + d_Z(z,z')^q)^{\frac{1}{q}} & (1 \le q < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{d_Y(y,y'), d_Z(z,z')\} & (q = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}. \tag{12}$$

で定まる距離である.

このとき, さらに $m_Z \in \mathscr{P}_2(Z)$ であるとすると, $Y \times_{l_q} Z$ は Y を FC 支配する.

例 3.5. (X, d, m) を測度距離空間とし, G をコンパクト位相群とする. また, G が X に等長に作用しているとする. このとき, 軌道全体の集合 X/G 上に距離 $d_{X/G}$ が

$$d_{X/G}([x], [x']) = \inf_{g, g' \in G} d(gx, g'x') \tag{13}$$

によって定まる. ただし, $[x]$ は $x \in X$ の G 軌道である. $(X/G, d_{X/G})$ は完備可分距離空間になり, 自然な射影 $p : X \ni x \mapsto [x] \in X/G$ により, $(X/G, d_{X/G}, p_*m)$ は測度距離空間である. この $(X/G, d_{X/G}, p_*m)$ を**軌道空間**という.

このとき, G の作用が等長的であることに加え, さらに X 上の測度 m を保ち, かつ, 連続的であるとすると, X は X/G を FC 支配する.

X が Y を FC 支配しているとき, X の曲率次元条件は Y に引き継がれ, Cheeger エネルギー汎関数が保たれるという結果を得た.

定理 3.6 (K. [8])**.** $(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ を測度距離空間とし, X が Y を FC 支配するとする. $p : X \to Y$ を FC 支配の定義の写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) X が実数 K に対し $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすならば, Y も $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす.

(2) 任意の $f \in L^2(Y, m_Y)$ に対して, $\mathrm{Ch}_X(f \circ p) = \mathrm{Ch}_Y(f)$ が成り立つ.

特に, X が実数 K に対し $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たすならば, Y も $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たす.

注意 3.7. 定理 3.6 は, 例 3.5 の場合については Galaz-García, Kell, Mondino, Sosa によって [3] において示されている. 彼らは群の場合に直接定理 3.6 を示したが, 本研究はより抽象的な FC 支配という枠組みを設定することで, 彼らの研究を一般化するとともに, その証明で本質的な役割を果たす性質を特定できたという重要な意味を持つ.

4. 主結果

4.1. 漸近的 FC 支配

次に, FC 支配を測度距離空間の列による漸近的な概念に拡張する. 測度距離空間列を扱うときは測度距離空間に基点を加えた点付き測度距離空間として扱う.

定義 4.1 (漸近的 FC 支配 [8]). $\{(X_n, d_n, m_n, \bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を点付き測度距離空間の列とし, $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とする. X_n が Y を**漸近的に FC 支配**するとは, ある完備可分距離空間 Z と写像 $p_n : X_n \to Z$, $\iota : Y \to Z$ が存在して次を満たすときをいう.

(1) $p_n : X_n \to Z$ は条件 FC を満たす 1-Lipschitz 写像である.

(2) $\iota : Y \to Z$ は等長埋め込み写像である.

(3) $p_{n*}m_n$ が $\iota_* m$ に弱収束する.

(4) $p_n(\bar{x}_n)$ が $\iota(\bar{y})$ に収束する.

また, X_n が Y を漸近的に FC 支配するとき, $X_n \searrow Y$ と表す.

ただし, 一般に $\{\mu_n\} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Z)$ が $\mu \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Z)$ に弱収束するとは, 任意の $\varphi \in C_{\mathrm{bs}}(Z)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_Z \varphi \, d\mu_n = \int_Z \varphi \, d\mu$$

が成り立つときをいう. $C_{\mathrm{bs}}(Z)$ は Z 上の有界な台を持つ有界な連続関数全体である.

Gigli-Mondino-Savaré は [4] で点付き測度距離空間全体の集合 $\mathcal{X}$ 上に **pmG 収束**と呼ばれる収束を定義した. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ が $Y \in \mathcal{X}$ に pmG 収束するとは, 定義 4.1 における p_n がすべて等長埋め込み写像になっている場合であり, 定義 4.1 は pmG 収束の一般化である. pmG 収束は $\mathcal{X}$ に Polish 位相を与えるが, 一方でひとつの測度距離空間列が漸近的に FC 支配する測度距離空間は一般に複数存在する.

漸近的 FC 支配の例には次のようなものがある.

例 4.2. $\{(Z_n, d_n, m_n, \bar{z}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を点付き測度距離空間の列とし, $m_n \in \mathscr{P}_2(Z_n)$ を満たすとする. $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とする. また, $1 \le q \le +\infty$ とする. このとき, $Y \times_{l_q} Z_n \searrow Y$ となる.

半径 r の n 次元球面 $S^n(r)$ を標準リーマン計量に関するリーマン距離 d_{S^n} と正規化されたリーマン体積測度 σ^n をもつ測度距離空間とする. 任意に $S^n(r)$ 上の点 $\bar{x}_n$ をとって固定し, 点付き測度距離空間と考える. 例 4.2 の具体的な場合として Z_n を $S^n(1)$ としたものが挙げられる.

例 4.3. $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とし, $1 \leq q \leq +\infty$ とする. このとき, $Y \times_{l_p} S^n(1) \searrow Y$ である.

$Y \times_{l_p} S^n(1)$ は Y に pmG 収束しない例である. また, この理論は例 4.3 のように次元が発散する列も例に含む. 次元が発散する列に対しても収束する位相の例として Gromov によって [5] で導入された集中位相がある. $Y \times_{l_p} S^n(1)$ は Y に集中位相では収束することが知られている. さらに, 次のような特徴的な例もある.

例 4.4. $(\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma, 0)$ を点付き 1 次元ガウス空間とする. すなわち, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ を 1 次元ユークリッド空間とし, γ を任意の Borel 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\gamma(A) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\, dx \tag{14}$$

で定まる Borel 確率測度とする. このとき, $(S^n(\sqrt{n}), d_{S^n}, \sigma^n, \bar{x}_n) \searrow (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma, 0)$ となる.

$\{S^n(\sqrt{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ は集中位相においても収束しないことが知られている.

4.2. L^2 関数列の収束とエネルギー汎関数の収束

測度距離空間の列 $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ と測度距離空間 (Y, d, m) に対して, ある完備可分距離空間 Z と Borel 可測写像 $p_n : X_n \to Z$, $\iota : Y \to Z$ で $p_{n*}m_n$ が $\iota_* m$ に弱収束するものが存在すると仮定する. このとき, "空間をわたる" L^2 関数列の収束を次で定める.

定義 4.5. $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y, m)$ とする. f_n が f に L^2 **弱収束する**とは, 任意の $\varphi \in C_{\mathrm{bs}}(Z)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} \varphi(p_n(x)) f_n(x)\, dm_n(x) = \int_Y \varphi(\iota(y)) f(y)\, dm(y) \tag{15}$$

を満たし, かつ,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) < +\infty \tag{16}$$

を満たすときをいう. また, f_n が f に L^2 **強収束する**とは, f_n が f に L^2 弱収束し, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) = \int_Y f(y)^2\, dm(y) \tag{17}$$

を満たすときをいう.

このような L^2 関数列の収束が存在するとき, [10] により, L^2 空間上のエネルギー汎関数の列に対し, 次の Mosco 収束と呼ばれる収束が定義できる.

定義 4.6. $E_n : L^2(X_n, m_n) \to [0, +\infty], E : L^2(Y, m) \to [0, +\infty]$ とする. 次の 2 つの条件を満たすとき, E_n が E に **Mosco 収束する**という.

(1) 任意の $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y, m)$ に対して, f_n が f に L^2 弱収束するならば,

$$\liminf_{n\to\infty} E_n(f_n) \geq E(f) \tag{18}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in L^2(Y, m)$ に対して, ある $f_n \in L^2(X_n, m_n)$ が存在して, f_n が f に L^2 強収束し, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f_n) = E(f) \tag{19}$$

を満たす.

4.3. 主結果

Gigli-Mondino-Savaré は [4] で, pmG 収束の下, 曲率次元条件の安定性や Cheeger エネルギー汎関数が Mosco 収束することを示した. 漸近的 FC 支配の下でも, pmG 収束と同様の曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束に関する結果が得られた.

定理 4.7 (K. [8])**.** 実数 K に対し $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす点付き測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点付き測度距離空間 Y を漸近的に FC 支配するとする. X_n, Y の Cheeger エネルギー汎関数をそれぞれ $\mathrm{Ch}_n, \mathrm{Ch}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) Y は $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす.

(2) Ch_n は Ch に Mosco 収束する.

特に各 X_n が $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすとき, Y も $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす.

注意 4.8. 定理 4.7 は, X_n が Y に pmG 収束する場合については Gigli-Mondino-Savaré によって [4] において示されている.

注意 4.9. X が Y を FC 支配しているとき, $\{X_n := X\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y を漸近的に FC 支配する. 定理 4.7 は定理 3.6 の拡張である. 特に, Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束は定理 3.6(2) よりも強い主張である.

Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束から得られる系として, $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間上に定義される Laplacian のスペクトルの収束がある. $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間上の Laplacian は 2 次形式 Ch に対応する自然な自己共役生成作用素として定義される. 定理 4.7 の系として次が得られる.

系 4.10. $K \in \mathbb{R}$ とする. $\{(X_n, d_n, m_n, \bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす点付き測度距離空間列, $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とし, $X_n \searrow Y$ とする. Δ_n, Δ をそれぞれ X_n, Y の Laplacian とし, そのスペクトルを $\sigma(\Delta_n), \sigma(\Delta)$ とする. このとき, 任意の $\lambda \in \sigma(\Delta)$ に対し, ある $\lambda_n \in \sigma(\Delta_n)$ で λ に収束するものが存在する.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405–1490.

[2] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87** (1987), no. 3, 517–547.

[3] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino, and G. Sosa, *On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below.* preprint (2017), arXiv:1704.05428.

[4] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.

[5] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[6] A. Kasue and H. Kumura, *Spectral convergence of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 147–179.

[7] ———, *Spectral convergence of Riemannian manifolds. II*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 1, 71–120.

[8] D. Kazukawa, *A new condition for convergence of energies and stability of Ricci curvature bounds.* in preparation.

[9] K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 4, 599–673.

[10] ———, *Variational convergence over metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 1, 35–75 (electronic).

[11] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[12] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.

[13] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.