整ホモロジー3球面とハンドル体群の部分群

大森　源城　(Genki Omori)*

1. 背景

H_g を図 1 のような，3 次元球面 S^3 に標準的に埋め込まれた向き付けられた種数 g の 3 次元ハンドル体とし，その境界 ∂H_g を Σ_g とおく．Σ_g 内に 2 次元円板 D_0 を図 1 のように取り，$\Sigma_{g,1}$ を Σ_g から D_0 の内部を取り除いて得られる境界成分数が 1 のコンパクト曲面とする．この時，Σ_g の D_0 上恒等的な自己微分同相写像全体からなる群を $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1})$ と書き，$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1})$ の，D_0 を各点で固定するアイソトピーによる商群を $\mathcal{M}_{g,1}$ とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ は，$\Sigma_{g,1}$ の写像類群と呼ばれる．

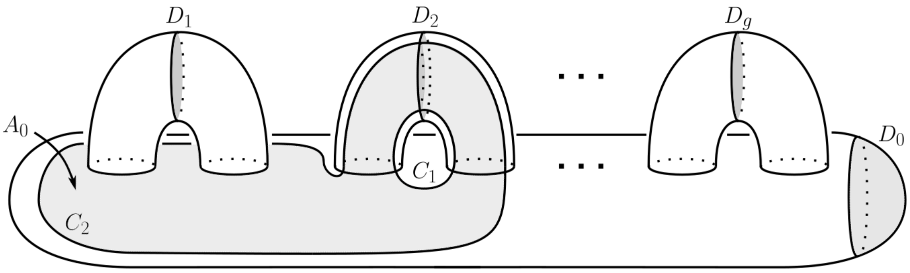

図 1: H_g のモデルと $\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線 C_1, C_2.

H'_g を，S^3 から H_g の内部を取り除いて得られる種数 g の 3 次元ハンドル体とする．この時，$\mathcal{M}_{g,1}$ の元 f に対し，M_f を，$S^3 = H_g \cup H'_g$ から H'_g を取り除き再び f に沿って H'_g を貼り合わせて得られる有向閉 3 次元多様体の微分同相類とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ の部分群で H_g，H'_g に拡張出来るアイソトピー類からなるものをそれぞれ $\mathcal{H}_{g,1}$，$\mathcal{H}'_{g,1}$ で定義し、これらをそれぞれハンドル体群と呼ぶ．$\mathcal{V}(3)$ を有向閉 3 次元多様体の微分同相類からなる集合とする．この時，対応 $\mathcal{M}_{g,1} \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{V}(3)$ は以下の全単射を誘導する ([1] を見よ)：

$$\lim_{g\to\infty} \mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{M}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1} \longrightarrow \mathcal{V}(3).$$

ここで，この帰納的極限は，図 2 のような自然な埋め込み $\iota : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$ から誘導される写像類群間の単射準同型写像 $\iota_* : \mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{g+1,1}$ から誘導されるものである．

有向閉 3 次元多様体 M と任意の正の整数 n に対し，n 次元の整係数ホモロジー群 $\mathrm{H}_n(M;\mathbb{Z})$ が S^3 のホモロジー群 $\mathrm{H}_n(S^3;\mathbb{Z})$ と同型である時，M を整ホモロジー 3 球面と呼ぶ．$\mathcal{S}(3)$ を有向整ホモロジー 3 球面の微分同相類からなる集合とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ の Σ_g の $\mathrm{H}_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ 上の作用は，シンプレクティック表現 $\Psi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ を誘導する．この Ψ の核を $\mathcal{I}_{g,1}$ と書き $\Sigma_{g,1}$ の Torelli 群と呼ぶ．定義から，各 $f \in \mathcal{I}_{g,1}$ に対し，M_f は整ホモロジー 3 球面である．この時，上の全単射を $\mathcal{I}_{g,1}$ に制限する事で以下の全単射が得

本研究は JST，CREST，JPMJCR17J4「熱可塑性エラストマーにおける動的ネットワークのトポロジー制御」（代表：中嶋健）の助成を受けたものである。
* 埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報部門　数理領域数学コース
e-mail: omori.g.aa@m.titech.ac.jp

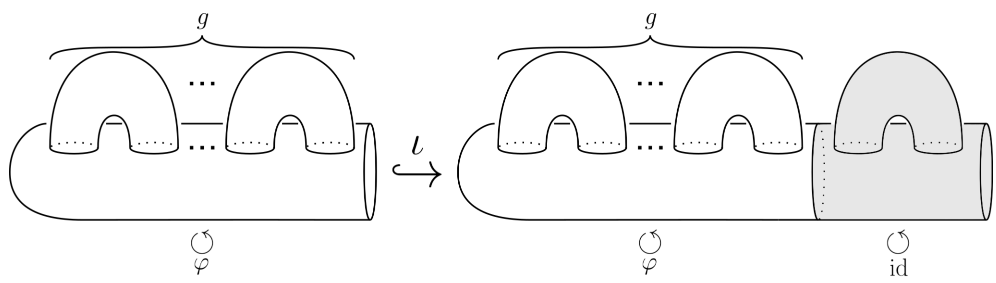

図 2: 埋め込み $\iota:\Sigma_{g,1}\hookrightarrow\Sigma_{g+1,1}$.

られる ([5] を見よ) :

$$\lim_{g\to\infty}\mathcal{H}_{g,1}\setminus\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}\longrightarrow\mathcal{S}(3).$$

この全単射から，両側剰余 $\mathcal{H}_{g,1}\setminus\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ を調べる事は整ホモロジー 3 球面を調べる事と同じであり，特に，任意の g に対して $\mathcal{H}_{g,1}\setminus\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ からの写像を構成する事が整ホモロジー 3 球面の不変量を構成する事と同値となる．$\mathcal{IH}_{g,1}:=\mathcal{I}_{g,1}\cap\mathcal{H}_{g,1}$, $\mathcal{IH}'_{g,1}:=\mathcal{I}_{g,1}\cap\mathcal{H}'_{g,1}$ とおく．この時，Pitsch [6] によって次の結果が得られている．

定理 1.1 ([6])**.** $f,\,h\in\mathcal{I}_{g,1}$ に対し，$[f]=[h]\in\mathcal{H}_{g,1}\setminus\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ となる事の必要十分条件は，$\varphi\in\mathcal{IH}_{g,1}$, $\varphi'\in\mathcal{IH}'_{g,1}$, $\psi\in\mathcal{H}_{g,1}\cap\mathcal{H}'_{g,1}$ が存在して以下を満たすことである：

$$h=\psi\varphi f\varphi'\psi^{-1}.$$

これらの事から，整ホモロジー 3 球面の不変量を構成する為に $\mathcal{IH}_{g,1}$ の単純な生成系は有用だと思われる．本講演では，$\mathcal{IH}_{g,1}$ の単純な生成系に関する説明を行う．

2. 準備

本章では，主結果の為の準備を行う．

$\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線 c に対し，c に沿って $\Sigma_{g,1}$ を切り開き，切り開いた片方の境界を右に 360 度回転させ，再び貼り合わせる．この操作から得られる $\Sigma_{g,1}$ の自己微分同相写像を t_c とおき，c に沿った右手 Dehn twist と呼ぶ（図 3 参照）．本講演では，微分同相写像とそのアイソトピー類を同一視する．

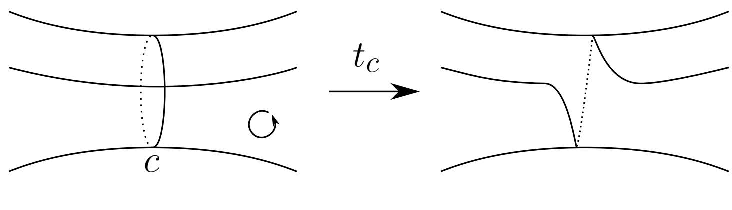

図 3: 単純閉曲線 c に沿った右手 Dehn twistt_c.

定義 2.1. $\{c_1,c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線の組とする．c_1 と c_2 が非分離的で互いにアイソトピックでなく $\Sigma_{g,1}$ のある部分曲面の境界と等しくなる時，$\{c_1,c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の *bounding pair (BP)* という．特に，その部分曲面の種数が h となる時，$\{c_1,c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の *genus-h bounding pair (genus-h BP)* と呼ぶ．

$\Sigma_{g,1}$ 上の *BP* もしくは *genus-h BP* $\{c_1,c_2\}$ に対し，$t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$ をそれぞれ *(*$\{c_1,c_2\}$ に沿った*)BP-map* もしくは *genus-h BP-map* という．

BP-map は $\mathcal{I}_{g,1}$ の元となることに注意する．

定義 2.2. G を群，H を G の正規部分群，$x_1, \ldots, x_n$ を H の元とする．H が $x_1, \ldots, x_n$ の G による共役全体で生成される時，H が $x_1, \ldots, x_n$ によって G の中で正規的に生成されるという．

Johnson [3] は以下の定理を示した：

定理 2.3 ([3]). *$g \geq 3$ に対し，$\mathcal{I}_{g,1}$ は 1 つの genus-1 BP-map によって $\mathcal{M}_{g,1}$ の中で正規的に生成される．*

定理 2.3 は，ある意味で，本講演の主結果の先行研究となるものである．主結果の説明を行う為に，以下のような，$\mathcal{I}_{g,1}$ の元となる特殊な BP-map を定義する．

定義 2.4. *$\{c_1, c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の genus-h BP とする．c_1 と c_2 が H_g 内でそれぞれ円板を張らず，$c_1 \sqcup c_2$ が H_g 内のアニュラスを張る時，$\{c_1, c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の genus-h homotopical BP (genus-h HBP) と呼ぶ．*

genus-h HBP $\{c_1, c_2\}$ に対し，$\{c_1, c_2\}$ に沿った BP-map $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$ を genus-h HBP-map と呼ぶ．

図 1 のような $\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線 C_1, C_2 に対し，$\{C_1, C_2\}$ は，genus-1 HBP の例である．genus-h HBP-map は $\mathcal{IH}_{g,1}$ の元となることに注意する．

3. 主結果

以下が本講演の主結果である．

定理 3.1. *$g \geq 3$ に対し，$\mathcal{IH}_{g,1}$ は $t_{C_1}t_{C_2}^{-1}$ によって $\mathcal{H}_{g,1}$ の中で正規的に生成される．ここで，C_1 と C_2 は図 1 の単純閉曲線である．*

定理 3.1 の証明の概略. x_0 を $\partial D_0 = \partial \Sigma_{g,1}$ の点とすると，$\mathcal{H}_{g,1}$ は H_g の基本群 $\pi_1(H_g, x_0)$ に作用する．$\pi_1(H_g, x_0)$ は階数 g の自由群 F_g と同型である為，この作用から準同型写像 $\eta : \mathcal{H}_{g,1} \to \mathrm{Aut}F_g$ が得られる．特に，Griffiths [2] により，この準同型写像 η は全射になる事が示されている．F_g のアーベル化から誘導される準同型写像 $\mathrm{Aut}F_g \to GL(n, \mathbb{Z})$ を考え，この核を IA_g とおく．IA_g は，$\mathrm{Aut}F_g$ の IA-部分群と呼ばれる．この時，η による $\mathcal{IH}_{g,1}$ の像が IA_g と一致する事が確認出来る為，以下の単完全系列が得られる：

$$1 \longrightarrow \ker \eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}} \longrightarrow \mathcal{IH}_{g,1} \stackrel{\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}}{\longrightarrow} \mathrm{IA}_g \longrightarrow 1. \tag{1}$$

$\ker \eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$ の生成系は Pitsch [6] によって与えられており，IA_g の生成系は Magnus[4] によって与えられている．その為，それらの $\ker \eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$ の生成元と IA_g の生成元の $\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$ に関するリフト全てを，$t_{C_1}t_{C_2}^{-1}$ の $\mathcal{H}_{g,1}$ による共役の積で書き表す事によって定理 3.1 の証明が与えられる．

□

参考文献

[1] J. S. Birman, *On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds. Knots, groups, and 3-manifolds* (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), Ann. of Math. Studies, No. **84**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1975, pp. 137–164.

[2] H. B. Griffiths, *Automorphisms of a 3-dimensional handlebody*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **26** (1964), 191–210.

[3] D. L. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), no. 1, 119–125.

[4] W. Magnus, *Über n-dimensionale Gittertransformationen*, (German) Acta Math. **64** (1935), no. 1, 353–367.

[5] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology **28** (1989), no. 3, 305–323.

[6] W. Pitsch, *Trivial cocycles and invariants of homology 3-spheres*, Adv. Math. **220** (2009), no. 1, 278–302.