

向き付可能閉曲面上の有限巡回群作用について

高橋 典寿 (Norihisa Takahashi)
(立命館大学 理工学研究科 基礎理工学専攻)

1 導入

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と表す. Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像のアイソトピー類の全体は写像の合成を積とし群をなす. これを Σ_g の写像類群と呼び, $\text{Mod}(\Sigma_g)$ で表す. リーマン面 S_g のモジュライ空間 $\mathcal{M}(S_g)$ はその写像類群 $\text{Mod}(S_g)$ の群作用による, そのタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S_g)$ の商空間として実現される. ここで, タイヒミュラー空間は可縮であるため, $\text{Mod}(S_g)$ の群構造を調べることにより, $\mathcal{M}(S_g)$ の位相的性質を調べることが出来る.

写像類群の有限部分群に関しては, 様々な研究が存在する. Nielsen は写像類群の任意の有限巡回部分群がある双曲構造に関する等長変換群の部分群として実現できることを示し, Kerckhoff[6] はこれを有限群へと拡張した. 廣瀬進氏 [2] は種数 4 以下の全ての極大有限巡回群作用の Dehn twist 表示を与えた. 石坂瑞穂氏 [4] は Σ_g 上の超楕円の周期的写像を共役の差を除き分類し, それらの Dehn twist 表示を与えた. ここで, 超楕円の対合はその商空間が S^2 となることで特徴付けられる.

本稿では, 商空間が T^2 となる対合と可換な周期的写像類に関する考察を行う. 本稿は, 野澤啓氏 (立命館大学 理工) との共同研究に基づく.

2 周期的写像の分類

$f \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ に対し, $f^n = id_{\Sigma_g}$ なる自然数 n が存在するとき, f は周期的であるという. また, $x \in \Sigma_g$ が周期的写像 f の重複点であるとは, f の周期 n よりも小さい自然数 k が存在し, $f^k(x) = x$ となることである. ここで, f の重複点全体の集合を M_f とおき, $\pi_f: \Sigma \rightarrow \Sigma/\langle f \rangle$ を n 重分岐被覆写像とする. $B_f := \pi(M_f)$ を f の分岐集合と呼ぶ. $b_i \in B_f$ に対し, $p_i \in M_f$ を任意に一つ固定する. p_i に置ける π_f の分岐指数を λ_i とおく. σ_i ($1 \leq \sigma_i \leq \lambda_i$) を p_i の近傍の境界への $f^{\frac{\sigma_i}{\lambda_i}}$ の作用が $\frac{\sigma_i}{\lambda_i} 2\pi$ であるように選ぶ. このとき $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}$ を p_i を含む f の軌道の *valency* と呼び, $[g, n: \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \dots]$ を f の *total valency* と呼ぶ. Nielsen による次の定理の系として, total valency は周期的写像類の共役類を完全に分類することが知られている.

定理 2.1. Σ_g 上の 2 つの周期的写像 $f, f' \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ が共役であることと, 以下の 3 条件が満たされることは同値:

1. f の周期 = f' の周期
2. $\sharp B_f = \sharp B_{f'}$
3. $\{f \text{ の valency の全体}\} = \{f' \text{ の valency の全体}\}$

例 2.2. 図 1 が表す T^2 上の周期的写像の total valency は $[1, 6; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}]$ である.

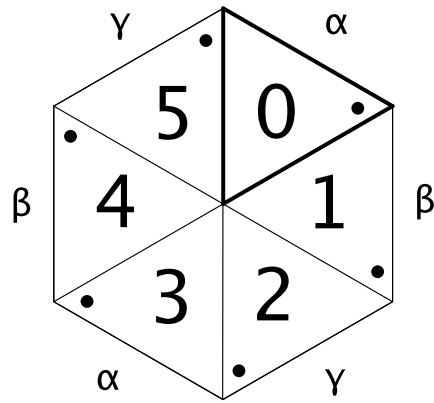


図 1

与えられた total valency が存在する為の条件が知られている. ([1],[2] 参照)

3 有限巡回群作用の可視化の例

Σ_4 上の有限巡回群作用の可視化の例を 2 つ紹介する. ここで, 図中の数字は基本領域の写り方を示し, ギリシャ文字は各辺の貼り合わせ方を示す.

例 3.1. 図 2 は $[4, 12; \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}]$ で生成される \mathbb{Z}_{12} 作用を表す.

例 3.2. 図 3 は $[4, 5; \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}]$ で生成される \mathbb{Z}_5 作用を表す.

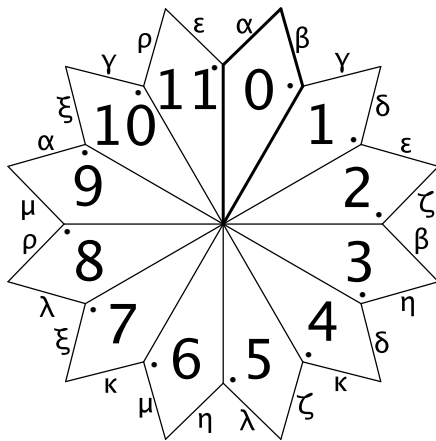


図 2

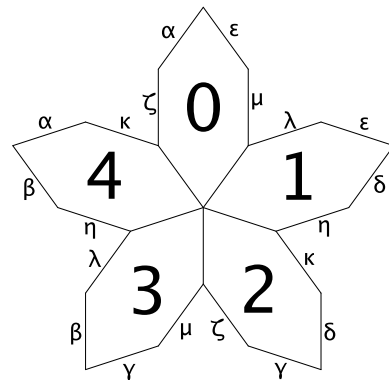


図 3

4 商空間が T^2 となる対合と可換な既約かつ周期的写像類の分類

ι_g を商空間が T^2 となる対合とする.

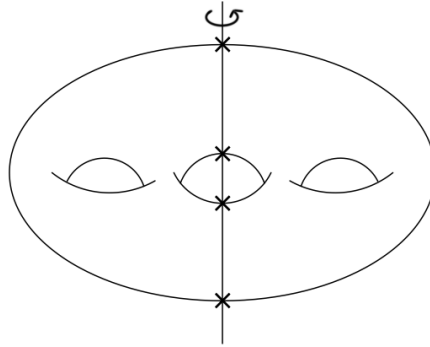


図 4

定理 4.1. $\phi \in \text{Mod}(\Sigma_g)$ を既約かつ周期的な写像類とする. もし, ϕ が ι_g と可換ならば, ϕ の共役類 $[\phi]$ は以下のいずれかに等しくなる.

$$\begin{array}{lll}
 [2, 6; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}], & [3, 8; \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}], & [3, 8; \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}], \\
 [3, 8; \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8}], & [3, 8; \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}], & [3, 12; \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}], \\
 [3, 12; \frac{5}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}], & [4, 12; \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}], & [4, 12; \frac{5}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}],
 \end{array}$$

これらの逆写像.

特に, $g \geq 5$ ならば, Σ_g 上の既約かつ周期的な写像であって, ι_g と可換となるものは存在しない.

証明には各周期的写像の基本領域による曲面の分割と, 分岐被覆の理論を用いる.

参考文献

- [1] T. Ashikaga and M. Ishizaka, “Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos’ theorem”, *Tohoku Math. J.* **54** (2002), 195–226.
- [2] S. Hirose, “Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4”, *Osaka J. Math.* **47** (2010), 385–421.
- [3] S. Hirose, “On periodic maps over surfaces with large periods”, *Osaka J. Math.* **62** (2010), 45–53.
- [4] M. Ishizaka, “Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families”, *Rev. Mat. Complut.* **20**(2) (2007), 483–495.
- [5] M. Ishizaka, “Monodromies of hyperelliptic families of genus three curves”, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 1–26.
- [6] S.P. Kerckhoff, “The Nielsen realization problem”, *Ann. Math. (2)*, **117**(2) (1983), 235–265.
- [7] A.M. Macbeath, “On a theorem by J. Nielsen”, *Quart. J. Math.* **13** (1962), 235–236.