

An Algebraic Representation of Flat Origamis

野坂 康祐 (Kosuke Nosaka)

京都教育大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育専修

din65036@kyokyo-u.ac.jp, nosakou6311@icloud.com

1 序論

本稿では、平坦に折り畳むという操作に限定した折り紙の代数表現について述べる。

折り紙に関する数学的アプローチについては、主に「折り線に注目した考察」と「折った状態に注目した考察」の2つに分けて考えることができる。特に前者については、「与えられた点や直線を指標として紙を1回折る方法は全てで7通りである」（一回折りの定理、折り紙の公理などと呼ばれる）ことが証明された [1] ことを皮切りに、立方根や任意の角の三等分線が紙を折ることで作図可能であることが示される [2] など、折り紙の作図可能性という話題へ発展している。一方、後者についてはあまり発展的な内容が見られない。というのも、折り紙の包括的な定義について未だ現実の折り紙に見合ったものが存在していないということが1つの要因となっている（例えば Belcastro と Hull による定義 [3] などがあるが、未定義語が存在している）。そこで、本稿では平坦に折り畳んだ折り紙だけに注目し、この代数表現を考えることで折り紙に関する諸問題を部分的に解決することを目指した。

平坦に折り畳んだ折り紙のことを、ここからは平坦折り紙と呼ぶことにしよう。平坦折り紙の多くは、以下に述べていくように折った後の形を表す作用と、重なり順を表す半順序による組み合わせで表現することができる（表現できない折り方とその理由については第6章で述べている）。実際に、様々な折り紙用語もこれに沿って定義できる他、「折り鶴」などといった特定の折り紙作品についても、これらのある同値関係に関する同値類として定義することができる。また、平坦に折り畳まれた折り紙の局所的な性質を述べた2つの工学的な通説「単頂点な平坦折り紙の山折りと谷折りの差は ± 2 である（前川の定理）」「単頂点な平坦折り紙の折り目の成す角の交代和は $\pm\pi$ である（川崎の定理）」について、この枠組みの中で示すことができる。

始めに本稿で扱う基礎的な知識について、2次元ユークリッド距離空間 (\mathbb{R}^2, d) が定まっていることを前提に以下にまとめる。

定義 1.1 (作用). \mathbb{A} を集合とする。この時、写像 $\theta: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ を \mathbb{A} 上の作用素といい、 $a \in \mathbb{A}$ における $\theta(a)$ を θa と略記する。また $A \subset \mathbb{A}$ についても、像 $\theta(A)$ を θA と略記する。

Ω を集合とし、その元を \mathbb{A} 上の作用素と定める。すなわち、写像 $\Pi: \Omega \rightarrow \{\theta \mid \theta: \mathbb{A} \text{ 上の作用素}\}$ を定める。この時、組 $(\Pi, \Omega, \mathbb{A})$ を Ω の \mathbb{A} への作用という。

注意 . 以後、 $\omega \in \Omega$ の Π による像 $\Pi(\omega)$ を単に ω と略記する。また、 $(\omega)^{-1}A$ ($A \subset \mathbb{A}$) とは作用素 ω による A の逆像のことを表す。

定義 1.2 (鏡映変換). L を直線とする。写像 $R_L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が直線 L に関する鏡映変換であるとは、任意の元 $p \in \mathbb{R}^2$ について $R_L(p)$ が以下の条件を満たすことをいう。

$$(1) d(p, L) = d(R_L(p), L)$$

$$(2) p, R_L(p) \text{ を通る直線が } L \text{ と垂直}$$

定義 1.3 (順序同型). $(S, \preceq_1), (T, \preceq_2)$ を半順序集合とする。

全単射写像 $f: S \rightarrow T$ が順序同型写像であるとは、以下の条件のどちらかを満たすことをいう。

$$(1) \forall a, b \in S, a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b)$$

$$(1') \forall a, b \in S, a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \succeq_2 f(b)$$

このとき、 (S, \preceq_1) と (T, \preceq_2) は順序同型であるといい、 $(S, \preceq_1) \cong (T, \preceq_2)$ と表す。

2 仮想平坦折り紙

以後, 集合 $A \in \mathbb{R}^2$ 上の直線とは A の 2 つの元を含む直線のことを表す. また集合 A, B について $A - B$ とは A から B を引いた差集合 $\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ を表す.

定義 2.1 (仮想平坦折り紙). $A(\subset \mathbb{R}^2)$ を内点を持つ有界閉集合とする.

始めに $\mathcal{F}_1 = \{(f_{11} \cdots f_{1n_1}) \mid f_{11}, \dots, f_{1n_1} : A^\circ \text{ 上の直線, } n_1 \in \mathbb{N}\}$ とする.

\mathcal{F}_1 の \mathbb{R}^2 への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_1, \mathbb{R}^2)$ と半順序 \preceq_1 について, 組 $((f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_1)$ を次のように定める.

(FO₁) 集合 A_1, A_2, \dots, A_{k_1} ($k_1 \in \mathbb{N}$) を $A^\circ - \bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i}$ の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_1$) がそれぞれ f_{11}, \dots, f_{1n_1} のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) となるように定める.

(FO₃) $\{A_1, \dots, A_{k_1}\}$ の異なる元 A_i, A_j に対して, $(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i^\circ \cap (f_{11} \cdots f_{1n_1})A_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば, $A_i \prec_1 A_j$ または $A_i \succ_1 A_j$ のいずれかの順序を定める.

次に $\mathcal{F}_2 = \{(f_{21} \cdots f_{2n_2})F_1 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, f_{21}, \dots, f_{2n_2} : F_1 A^\circ \text{ 上の折り線, } n_2 \in \mathbb{N}\}$ とする.

\mathcal{F}_2 の \mathbb{R}^2 への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_2, \mathbb{R}^2)$ と半順序 \preceq_2 について組 $((f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_2)$ を次のように定める.

(FO₁) 集合 B_1, B_2, \dots, B_{k_2} ($k_2 \in \mathbb{N}$) を $A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \right)$ の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_2$) がそれぞれ作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に f_{21}, \dots, f_{2n_2} のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) を合成した写像となるように定める.

(FO₃) $\{B_1, \dots, B_{k_2}\}$ の異なる元 B_i, B_j に対して, $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i^\circ \cap (f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば, $B_i \prec_2 B_j$ または $B_i \succ_2 B_j$ のいずれかの順序を定める.

帰納的に $\mathcal{F}_m = \{(f_{m1} \cdots f_{mn_m})F_{m-1} \mid F_{m-1} \in \mathcal{F}_{m-1}, f_{m1}, \dots, f_{mn_m} : F_{m-1} A^\circ \text{ 上の折り線, } n_m \in \mathbb{N}\}$ を考える. ($m \in \mathbb{N}$)

\mathcal{F}_m の \mathbb{R}^2 への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_m, \mathbb{R}^2)$ と半順序 \preceq_m について $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を次のように同様にして定めることができる.

(FO₁) 集合 C_1, \dots, C_{k_m} ($k_m \in \mathbb{N}$) を

$$A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \cup \cdots \cup \bigcup_{k=1}^{n_m} ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mk} \right)$$

の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_m$) がそれぞれ作用素 $(f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に f_{m1}, \dots, f_{mn_m} のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) を合成した写像となるように定める.

(FO₃) $\{C_1, \dots, C_{k_m}\}$ の異なる元 C_i, C_j に対して,

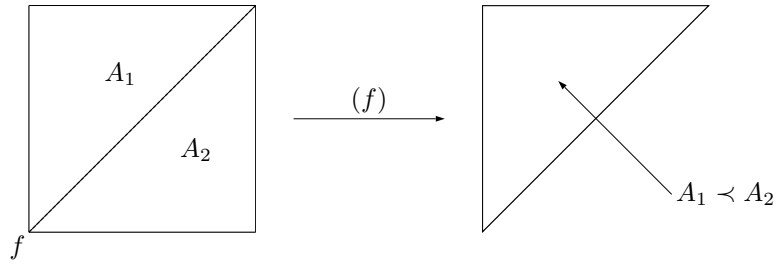
$$(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i^\circ \cap (f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_j^\circ \neq \emptyset$$

であるならば, $C_i \prec_m C_j$ または $C_i \succ_m C_j$ のいずれかの順序を定める.

以上のようにして定めた $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を仮想平坦折り紙という. また以後, 仮想平坦折り紙に定まる半順序 $\preceq_1, \preceq_2, \dots, \preceq_m$ を統一して \preceq と表し, これを重なり順とよぶ.

実際に $A = [0, 1] \times [0, 1]$ (: 正方形) として, いくつか仮想平坦折り紙の具体例を挙げよう.

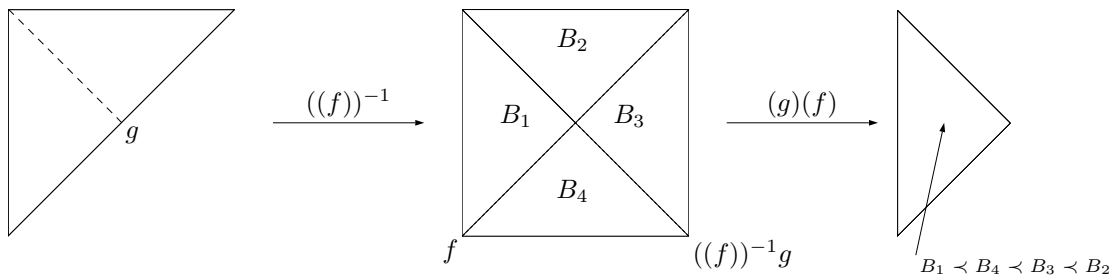
(例 1) 正方形を半分に折るとは, 例えば次のような $((f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 (f) は次のように定められる.

$$\begin{aligned} (f)x &= R_f(x) & (x \in A_2) \\ (f)x &= x & (x \in A_1) \end{aligned}$$

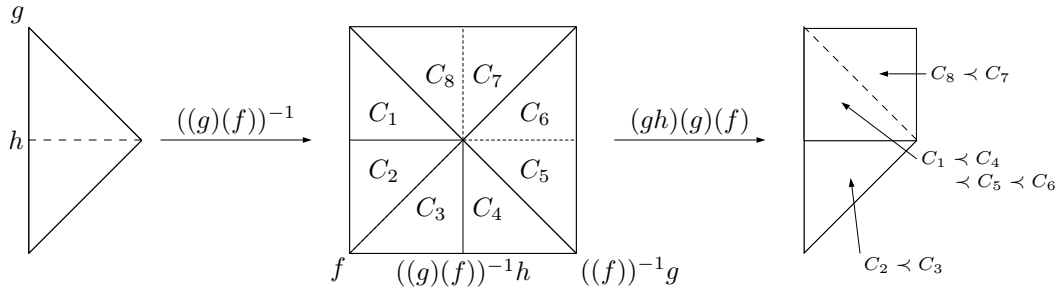
(例 2) 例 1 をさらに半分に折るとは, 例えば次のような $((g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned} (g)(f)x &= R_g((f)x) & (x \in B_2 \cup B_3) \\ (g)(f)x &= (f)x & (x \in B_1 \cup B_4) \end{aligned}$$

(例 3) 「袋折り」とよばれる技法は, 例えば次のような $((gh)(g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(gh)(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned} (gh)(g)(f)x &= R_h \circ R_g((g)(f)x) & (x \in C_7) \\ (gh)(g)(f)x &= R_h((g)(f)x) & (x \in C_6) \\ (gh)(g)(f)x &= R_g((g)(f)x) & (x \in C_8) \\ (gh)(g)(f)x &= (g)(f)x & (x \text{ in others}) \end{aligned}$$

3 折り紙用語の代数表現

折り紙に関する様々な用語についても, 仮想平坦折り紙を使って表現することができる. これについて, 仮想平坦折り紙の性質を述べながら以下に紹介する.

以後, 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A} = ((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \prec)$ は (FO_1) により定まった領域 A_1, A_2, \dots, A_n をもつものとする. 展開された各折り線を元とする集合

$$\{f_{11}, \dots, f_{1n_1}, \dots, ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mn_m}\}$$

を $\text{dev}A$ と表し, A に定まっている作用素 $(f_{m_1} \cdots f_{m_{n_m}}) \cdots (f_{1_1} \cdots f_{1_{n_1}})$ を F と略記する.

また, 集合 A に対して $\#\{A\}$ とは, A に含まれる要素の個数を表す.

命題 3.1. 仮想平坦折り紙 A における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について次が成り立つ.

$$\#\{A_i \cap A_j\} > 1 \Rightarrow \exists! f \in \text{dev}A \text{ s.t. } \#\{f \cap A_i \cap A_j\} > 1$$

証明. 条件 $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ より, A_i と A_j は互いに隣り合う. 定義 2.1 より, A_i と A_j の境目 $A_i \cap A_j$ はある $f \in \text{dev}A$ の部分集合となる. ゆえに題意が成り立つ. \square

命題 3.1 により, (FO_1) により定まる領域の境目は, 折り線に依らず隣り合う領域によって決まることが分かる. ゆえに, 「折り目」は仮想平坦折り紙において次のように定義できる.

定義 3.2 (折り目). 仮想平坦折り紙 A における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ が成り立つとき, $c_{ij} = \{x \mid x \in A_i \cap A_j\}$ を A_i と A_j の間の折り目という. 特に i, j を指定しない時, これを A 上の折り目という.

命題 3.3. A 上の全ての折り目を c_1, c_2, \dots, c_k ($k \in \mathbb{N}$) と名付ける. このとき, 次が成り立つ.

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} c_i = \bigcup_{f \in \text{dev}A} f$$

証明. (C) $x \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} c_i$ とする. このとき, $\exists c_{i'j'} : A$ 上の折り目 s.t. $x \in A_{i'} \cap A_{j'}$ が成り立つ. 命題 3.1 より $x \in f \cap A_{i'} \cap A_{j'}$ であるから, $x \in f$ である.

(D) $x \in \bigcup_{f \in \text{dev}A} f$ とする. このとき, $\exists f \in \text{dev}A$ s.t. $x \in f$ が成り立つ. f の定め方により, x はある隣り合う領域 A_i, A_j の元になる. ゆえに, $x \in f \cap A_i \cap A_j$ となり, 定義 3.2 から $x \in c_{ij}$ が成り立つ. \square

これにより, 展開された折り線全体と折り目全体が一致することが分かった.

命題 3.4. 仮想平坦折り紙 A において, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする. このとき, 次が成り立つ.

$$Fc_{ij} \cap FA_i = Fc_{ij} \cap FA_j$$

すなわち, 折り目が 2 つに裂けるような作用素は存在しないということである.

証明. c_{ij} の元は作用素 F により, A_i の元に定められた写像と A_j の元に定められた写像のどちらにも対応する. もし, $Fc_{ij} \cap FA_i \neq Fc_{ij} \cap FA_j$ であるならば, c_{ij} の元はこれらの鏡映変換により 2 つの元に分かれてしまっている. すなわち, F によって 2 つの元へ対応するような $x \in c_{ij}$ が存在することになってしまう, F が作用素であることに矛盾する. \square

折り目の状態を表す用語として, 「山折り」と「谷折り」がある. この 2 つについても, 鏡映変換の偶奇で定めることができる.

定義 3.5 (山折り, 谷折り). A を仮想平坦折り紙とし, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目 ($A_i \prec A_j$) とする.

(M) A_i の元に奇数回の鏡映変換, A_j に偶数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を A 上の山折りという.

(V) A_i の元に偶数回の鏡映変換, A_j に奇数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を A 上の谷折りという.

ただし, 恒等変換は偶数回の鏡映変換とする.

命題 3.6. 仮想平坦折り紙 A における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であるとき, 次が成り立つ.

$$A_i \prec A_j \Rightarrow c_{ij} : \text{山折り または 谷折り}$$

すなわち, 重なり合う領域の間の折り目は必ず山折りか谷折りのいずれかである.

証明．条件の A_i と A_j にどちらも偶数回の鏡映変換が定まっているとする．

偶数回の鏡映変換は回転変換を表すことに注意すると, A_i と A_j を重ねる ($FA_i^\circ \cap FA_j^\circ \neq \emptyset$ となる) ためには, 折り目 c_{ij} をずらす (すなわち $F(A_i \cap c_{ij}) \neq F(A_j \cap c_{ij})$ とする) 必要がある. これは命題 3.4 に矛盾する. A_i と A_j にどちらも奇数回の鏡映変換が定まっている場合も, 反転させた回転変換を表していることに注意すれば, 同様に矛盾が導かれる. ゆえに, 条件を満たす c_{ij} は山折りか谷折りでなければならない. \square

また重なり順が存在しない領域とその間の折り目は, 合同のまま写される.

命題 3.7. 仮想平坦折り紙 \mathcal{A} における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であり A_i と A_j に重なり順が存在しないとき, 次が成り立つ.

$$A_i \cup A_j \equiv FA_i \cup FA_j$$

証明．条件と命題 3.4 より, A_i と A_j は境界がずれないまま鏡映変換されることになる. ゆえに, 作用素 F がその題意を満たす合同変換になっている. \square

定義 3.8 (補助折り目). 命題 3.7 の条件を満たす A_i と A_j の間の折り目 c_{ij} のことを補助折り目という.

折り紙の局所的な性質を考えるために, 次の定義を与える.

定義 3.9 (頂点). 仮想平坦折り紙 \mathcal{A} において, 山折りまたは谷折りが交わる点を \mathcal{A} の頂点という. 頂点が A の内部にあって 1 つだけである時, \mathcal{A} は単頂点であるという.

命題 3.10. \mathcal{A} を単頂点仮想平坦折り紙とし, この頂点を v とする. Fv の十分近くを通る FA° 上の直線を l とし, $FA^\circ - l$ の連結成分の閉包で Fv を含む方を D とする. このとき, $F^{-1}D$ は多角形となる.

証明． v が A の内点であることに注意して, $\partial FA \cup l$ を考える. このとき, この集合は 2 点集合であり, この点を a, b とすると, $F^{-1}a$ と $F^{-1}b$ は \mathcal{A} 上の山折りまたは谷折りとなる各折り目の 1 点になる. これらを v を囲むようにして線分で繋いだ閉曲線が $F^{-1}l$ であり, v を含む連結集合が $F^{-1}D$ である. $F^{-1}D$ は線分で囲まれているから多角形となる. \square

実際の折り紙 (単頂点のものに限る) でも, 頂点付近を切った切り口は必ず多角形になることが分かる. このように, 折り紙を一直線に切ってできる多角形は「一刀折り」と呼ばれている. 仮想平坦折り紙では, これを次のように定義しよう.

定義 3.11 (一刀折り). 命題 3.11 における $F^{-1}D$ のことを \mathcal{A} の直線 l による一刀折りという.

現実的な山折り, 谷折りという操作を考えた場合, 図 1 のように xyz 空間において xy 平面と平行な平面を, 折り線を軸として z 方向に回転させて重ね合わせるという操作がイメージされる. この場合, 山折りが z 方向に π 回転していると見なすと, 谷折りは z 方向に $-\pi$ 回転しているものだと見なすことができる. しかし, 本論文における山折り, 谷折りは \mathbb{R}^2 平面の鏡映変換と半順序の関係によって定められたものであるため, このような角度構造は自然に組み込まれるものではない.

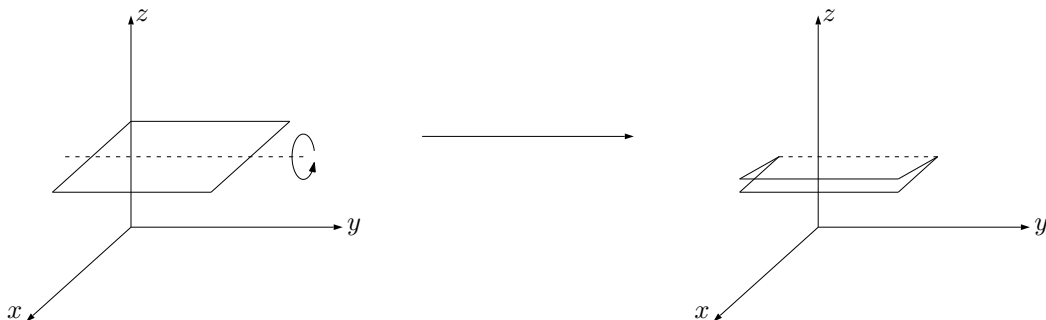


図 1: 実際の谷折りのイメージ図

そこで, 山折り, 谷折りを考えるにあたり, 本論文では次のような角度構造を要請する.

要請 1. c_{ij} を \mathcal{A} 上の A_i と A_j の間の山折りとし, Fc_{ij} 上の 1 点を c , FA_i 上の 1 点を a , FA_j 上の 1 点を b とする. また, ac を a と c を通る線分, bc を b と c を通る線分と定める. このとき, ac と bc が同一直線上にあるならば, その角度 ($\angle acb$) は π であると定める. また c_{ij} が谷折りのとき, ac と bc が同一直線上にあるならば, その角度 ($\angle acb$) は $-\pi$ であると定める.

また, 現実的な平坦折りを考えるために, 定義 3.11 で扱った一刀折り $F^{-1}D$ をもう一度折り畳むという操作を考えよう. 一刀折り $F_0(F^{-1}D) = F^{-1}D$ から $F_1(F^{-1}D) = FF^{-1}D$ への変形 F_t を時間 $t \in [0, 1]$ での連続変形として捉える. 具体的には, xy 平面上にある $F^{-1}D$ から yz 平面と平行な平面上にある $FF^{-1}D$ への連続変形を $v = Fv$ になるようにして定める (図 2 参照). このとき, 任意の時間 $t \in [0, 1)$ において, $F_t(F^{-1}D)$ の境界である閉曲線 $F_t(F^{-1}l)$ は頂点 v 周りに回転数 ± 1 を保っている (ただし, 連続変形は \mathbb{R}^3 空間における操作であるため, $F_t(F^{-1}l)$ の回転数とは, $F_t(F^{-1}l)$ を xy 平面に v を内部に含むように射影した閉曲線の回転数として定める. すなわち, 図 2 を真上もしくは真上から少しずらした視点から見たときの回転数として考える). ゆえに, その極限である潰れた閉曲線 $FF^{-1}l$ についても, その頂点 v 周りの回転数は ± 1 であると考えたい. このことから, 本論文ではさらに次のことを要請する.

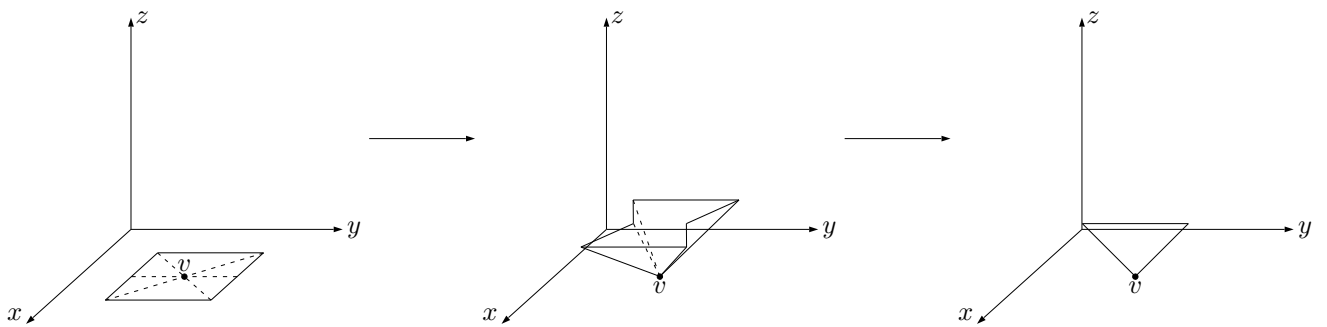


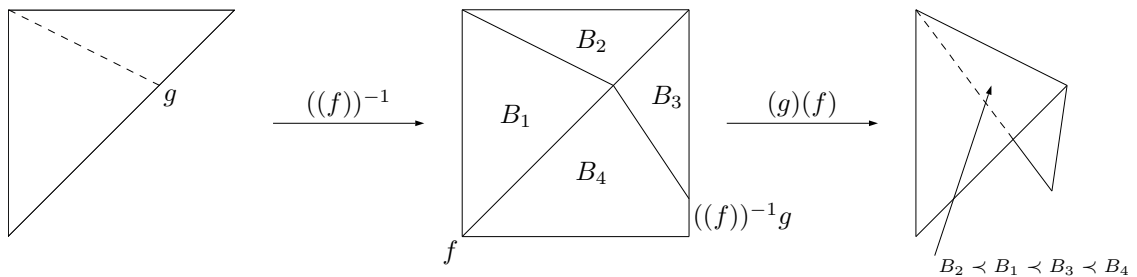
図 2: 連続変形 F_t のイメージ図

要請 2. 仮想平坦折り紙 \mathcal{A} 上の直線 l による一刀折りを $F^{-1}D$ とするとき, l は頂点 Fv 周りの回転数 ± 1 の閉曲線であると定める.

4 可折平坦折り紙

仮想平坦折り紙において, 重なり順とは自然に決まるものではなく, 勝手に定めるといったものであった. ゆえに重なり順の定め方によっては, 実現不可能な折り方が存在する. 実際に, 先ほど紹介した例 2 に少し手を加えてみよう.

(例 4) 例 2 の $((g)(f)\mathcal{A}, \preceq)$ を次のように変更する.



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned} (g)(f)x &= R_g((f)x) & (x \in B_2 \cup B_3) \\ (g)(f)x &= (f)x & (x \in B_1 \cup B_4) \end{aligned}$$

定義 3.5 より, c_{ij} を B_i と B_j の間の折り目とすれば, c_{12} は山折り, c_{23} は谷折り, c_{34} は谷折り, c_{41} は谷折りである. しかし, この操作では c_{41} が破けてしまい, 紙を切らない限り現実的に起こりえなくなってしまう. このような操作を除くため, 仮想平坦折り紙に以下のような制限を加える.

定義 4.1 (可折平坦折り紙). 仮想平坦折り紙 \mathcal{A} において, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする. 次を満たす c_{ij} を非可折であるという.

$$A_i \prec^{\exists} A_k \prec A_j \text{ s.t. } \forall x \in c_{ij}, Fx \in FA_k^{\circ}$$

そうでない c_{ij} を可折といい, \mathcal{A} 上の全ての折り目が可折である時, \mathcal{A} を可折平坦折り紙という.

単頂点な可折平坦折り紙において, 以下の「前川の定理」「川崎の定理」を示すことができる. 以下の証明のアイデアは [4] に記載されている.

定理 4.2 (前川の定理). \mathcal{A} を仮想平坦折り紙かつ単頂点とし, $M = \#\{\mathcal{A} \text{ 上の山折り}\}$, $V = \#\{\mathcal{A} \text{ 上の谷折り}\}$ とする. この時, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}: \text{可折平坦折り紙} \Rightarrow M - V = \pm 2$$

注意. 単頂点可折平坦折り紙においては, $M + V \geq 3$ である. 実際 $M + V \leq 2$ の場合, \mathcal{A} の内部で山折りまたは谷折りは交わることができないので, \mathcal{A} は単頂点にならない.

証明. \mathcal{A} 上の全ての山折りまたは谷折りに c_1, \dots, c_n と名付ける. また頂点を v とおく. \mathcal{A} の直線 l による一刀折り $F^{-1}D$ を考える. このとき, $(F)^{-1}D$ は c_1, \dots, c_n の各 1 点を頂点とする n 多角形となる. この n 多角形の境界 $(F)^{-1}l$ は頂点 v 周りで回転数 ± 1 の閉曲線となる. 要請 2 により, l も Fv 周りで回転数 ± 1 の閉曲線である. また要請 1 により, 山折りを通るときは π 回転, 谷折りを通るときは $-\pi$ 回転しているから, $\pi M - \pi V = \pm 2\pi$ が成り立ち, $M - V = \pm 2$ が導かれる. \square

系 4.3. 単頂点可折平坦折り紙において $M + V$ は偶数である.

証明. 定理 4.2 より, $M - V = \pm 2$ であるから,

$$M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V = 2(\pm 1 + V)$$

\square

定理 4.4 (川崎の定理). \mathcal{A} を仮想平坦折り紙かつ単頂点であるとし, \mathcal{A} 上の谷折り, 山折りを反時計回りに c_1, \dots, c_{2w} ($w \in \mathbb{N}$) と定める. この時, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}: \text{可折平坦折り紙} \Rightarrow \angle(c_1, c_2) + \angle(c_3, c_4) + \dots + \angle(c_{2w-1}, c_{2w}) = \pm \pi$$

ただし, $\angle(c_i, c_j)$ は c_i と c_j の成す角 (反時計回りを正とする) を表す.

証明. 任意の領域 $A_k \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ について, FA_k は合同変換であるから, $\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = \pm \angle(c_i, c_{i+1})$ が成り立つ. また定義 3.5 より c_i が山折りまたは谷折りであるためには,

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) > 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) < 0$$

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) < 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) > 0$$

のどちらかが成立しなければならない (ただし $c_{2w+1} = c_1$ とする).

ところで命題 3.4 より, c_1 から順に c_2, c_3, \dots, c_{2w} を通って c_1 に戻る閉曲線 D を考えると, FD は閉曲線に保たれる. これを満たすためには, 隣り合う折り目の間の角度の総和は 0 でなければならない. すなわち,

$$\sum_{i=1}^{2w} \angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = 0$$

が成り立つ.

よって $\sum_{i=1}^{2n} |\angle(c_i, c_{i+1})| = 2\pi$ であるから, $\angle(Fc_1, Fc_2) > 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2w} |\angle(c_j, c_{j+1})| &= |\angle(c_1, c_2)| + |\angle(c_2, c_3)| + \cdots + |\angle(c_{2w}, c_1)| \\ &= \angle(Fc_1, Fc_2) - \angle(Fc_2, Fc_3) + \cdots - \angle(Fc_{2w}, Fc_1) = 2\pi \\ \sum_{j=1}^{2w} |\angle(c_j, c_{j+1})| + \sum_{j=1}^{2n} \angle(Fc_j, Fc_{j+1}) &= 2(\angle(Fc_1, Fc_2) + \angle(Fc_3, Fc_4) + \cdots + \angle(Fc_{2w-1}, Fc_{2w})) = 2\pi \\ &\quad \angle(Fc_1, Fc_2) + \angle(Fc_3, Fc_4) + \cdots + \angle(Fc_{2w-1}, Fc_{2w}) = \pi \end{aligned}$$

$\angle(Fc_1, Fc_2) < 0$ と仮定すると, 同様にして $\angle(c_1, c_2) + \angle(c_3, c_4) + \cdots + \angle(c_{2w-1}, c_{2w}) = -\pi$ が得られる. \square

注意. 定理 4.2 及び定理 4.4 の逆はどちらも成り立たない. 実際, 例 4 は山折りと谷折りの差が 2 であるとともに, 折り目の成す鋭角の交代和が π であるが, 定義 4.1 を満たしていない.

5 折り紙同形

ある特定の折り紙作品が, 例え違うサイズや違う折り方で作られたとしても, それらは「何らか」の意味で同じものであると言いたい. 以下はその「何らか」を「最終的な形が相似で, 重なり順が全て等しい」という意味で捉え, これを同値関係として表したものである.

定義 5.1 (折り紙同形). 可折平坦折り紙 A, B が

$$\begin{aligned} A &= ((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq) \\ B &= ((g_{l1} \cdots g_{lk_l}) \cdots (g_{11} \cdots g_{1k_1})B, \preceq) \end{aligned}$$

と表せるとする. また, (FO_1) によりそれぞれ領域 $A_1, A_2, \dots, A_u, B_1, B_2, \dots, B_v$ が定まっているとする. このとき, A と B が折り紙同形であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- (1) $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A \circ (g_{l1} \cdots g_{lk_l}) \cdots (g_{11} \cdots g_{1k_1})B$
- (2) $u = v$ のとき, 以下を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, u\}$ が存在する.
 - (i) $A_1 \circ B_{\sigma^{-1}(1)}, A_2 \circ B_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, A_u \circ B_{\sigma^{-1}(u)}$
 - (ii) $\forall A_i, A_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_u\}, A_i \prec A_j \Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)} \prec B_{\sigma^{-1}(j)}$
または $\forall A_i, A_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_u\}, A_i \prec A_j \Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)} \succ B_{\sigma^{-1}(j)}$

$u > v$ のとき, c_{ij} が補助折り目となるような領域 A_i と A_j について, これを合わせた領域 $A_{ij} = A_i \cup A_j$ を作る. この操作を, 新しく番号付けしたときに v 個の領域の列 A_1, A_2, \dots, A_v ができるまで繰り返す. こうしてできる A_1, A_2, \dots, A_v と B_1, B_2, \dots, B_v について, (i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$ が存在するものがある.

$u < v$ のとき, $c'_{i'j'}$ が補助折り目となるような領域 $B'_{i'}$ と $B'_{j'}$ について, これを合わせた領域 $B_{i'j'} = B'_{i'} \cup B'_{j'}$ を作る. この操作を, 新しく番号付けしたときに u 個の領域の列 B_1, B_2, \dots, B_u ができるまで繰り返す. こうしてできる B_1, B_2, \dots, B_u と A_1, A_2, \dots, A_u について, (i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, u\}$ が存在するものがある.

A と B が折り紙同形であるとき, $A \sim B$ と表す.

注意. A と B がもつ領域の個数が異なる場合に対して行っている操作は, 折られていない (山折り, 谷折りでない) 折り目をないものと見なして数え直すという意味がある. こうした折り目がないものと見なせることは, 命題 3.7 で論じた合同性により保証される. また, 定義 5.1 ではどちらか一方の領域を減らして, もう片方と数を合わせるように定めているが, その代わりに両方から補助折り目を全て除いて数え直した領域について, 条件を満たす写像 σ を考えても良い. ただし, 補助折り目を全て除いて数え直した領域の個数が異なる場合, 2 つの可折平坦折り紙は同形でないと定める.

命題 5.2. \sim は同値関係である.

証明. 相似 \sim は同値関係であるから, 条件 (1) と (2)(i) について反射律, 対称律, 推移律が成立する. また, $P_A = (\{A_1, A_2, \dots, A_u\}, \preceq)$, $P_B = (\{B_1, B_2, \dots, B_u\}, \preceq)$ とすると, 条件の写像 σ は $\{A_1, A_2, \dots, A_u\}$ から $\{B_1, B_2, \dots, B_u\}$ への順序同型写像となる. すなわち $P_A \cong P_B$ であり, これは同値関係であるから条件 (2)(ii) についても反射律, 対称律, 推移律が成立する. ゆえに \sim は同値関係であると示される. \square

定義 5.3 (折り紙作品). 可折平坦折り紙全体の集合 $\{A \mid A: \text{可折平坦折り紙}\}$ を \mathbb{F} と表す. このとき, 商集合 \mathbb{F}/\sim を折り紙作品全体といい, その各元を折り紙作品という.

以上のようにして, 様々な折り紙作品は可折平坦折り紙とその同値関係によって代数的に表現される.

6 今後の課題

例えば, 折り紙作品の一つである折り鶴の性質 (例えば川崎による研究 [5] がある) について, 以上の結果を用いれば代数的に処理することができる. このように, 折り紙作品を個々に抜き取ってその性質を調べることが可能となった. また, 異なる手順で折られた折り紙同形な 2 つの可折平坦折り紙があるとき, どちらの折り方が早いかというような評価も考えることができる. ただし, これには 1 つの折り方が実際には 2 つのステップに分けられるといったような可約性を制限しなければならないだろう. 以上を踏まえると, 折り方の最小ステップ数という話題に発展させることができる.

ところが, 現実の平坦折り紙全てが可折平坦折り紙を以ってしても表現できるわけではないことを最後に断っておく. 例えば「ねじり折り」と呼ばれる技法 (図 3) は重なり順が循環するため, 半順序では表現できない. また, この技法を剛体の連続変形として表現しようとしても, 紙の伸縮性により実現可能となる折り方のために表現できないことが知られている [6]. これを解消するには折り紙全体に半順序関係を定義するのではなく, より局所的な部分の半順序関係を考えて, 全体はこれらの族として総合する必要がある. 以上のように, 現実の平坦折り紙により接近できるような表現の追及も行っていかなければならない.

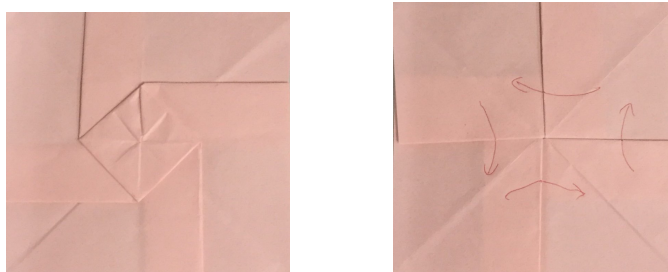


図 3: ねじり折り (左が表, 右が裏)

参考文献

- [1] R.C.Alperin and R.J.Lang, “One-,Two- and Multi-fold Origami Axioms”, 4OSME:The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006
- [2] 和田宗士, 「折り紙の作図可能性について」, 学位論文 (兵庫教育大学), 2008年
- [3] S.Belcastro and T.Hull, “Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations”, Linear Algebra and its Applications, 2002
- [4] T.Hull, “On the mathematics of flat origamis”, Congressus Numerantium, 1994
- [5] 川崎敏和, 「折り鶴の幾何」, 折り紙の数学と科学, 59-70 頁, 森北出版, 2005年
- [6] トーマス・ハル (邦訳 羽鳥公士郎), 「ドクター・ハルの折り紙数学教室」, 289-314 頁, 日本評論社, 2015年