ホモトピー代数を用いたファイバー束の特性類の構成

松雪敬寛 (Takahiro Matsuyuki)*

概要

本稿では, ホモトピー代数的な構造の変形を用いて, 導分のなす Lie 代数のコホモロジー類として, 可微分ファイバー束の特性類を構成する方法について紹介する. ファイブレーションの特性類が導分のコホモロジーで記述されることは, ホモトピー論における結果として知られているが, その Chern-Weil 理論的な構成について考える. 特に, 曲面束に対してはよく知られた特性類を得ることができる.

1 復習: ベクトル束の特性類

ファイバー束の特性類について述べる前に, よく知られているベクトル束の特性類について復習しておく.

1.1 ホモトピー論的構成

ホモトピー論的には, n 次元有向実ベクトル束 $E \to B$ が与えられたとき, 分類写像と呼ばれる連続写像

$$B \to BSO(n)$$

が存在し, この写像で普遍束 $ESO(n) \to BSO(n)$ を引き戻すと $E \to B$ と同型なベクトル束が得られる. この写像から, コホモロジー間の準同型

$$\Phi : H^\bullet(BSO(n)) \to H^\bullet(B)$$

が誘導される. ここで, 分類写像はホモトピーを除いて一意的であるからこのコホモロジー間の準同型 Φ は分類写像の選び方によらない. したがって, 写像 Φ はベクトル束の不変量である. これを**特性写像**と呼ぶことにする. コホモロジー類 $c \in H^\bullet(BSO(n))$ が与えられるたびに, ベクトル束の不変量 $c(E) := \Phi(c) \in H^\bullet(B)$ が得られる. この類 c あるいは $c(E)$ を**特性類**と呼ぶ. 以下では, 簡単のため, コホモロジーは実係数のみを考える.

分類空間 $BSO(n)$ は Grassman 多様体と同値になり, そのコホモロジーは $SO(n)$-不変多項式に全体になる:

$$H^\bullet(BSO(n); \mathbb{R}) = I(SO(n)) = S(\mathfrak{so}(n)^*)^{SO(n)}$$

但し, $S(V)$ は線形空間 V が生成する対称代数である. ところで, これは Pontrjagin 多項式 (類) p_i と Euler 多項式 (類) e により生成されていた:

$$I(SO(2n)) = \mathbb{R}[p_1, \ldots, p_n], \quad I(SO(2n+1)) = \mathbb{R}[p_1, \ldots, p_{n-1}, e].$$

* 東京工業大学理学院数学系数学コース, e-mail: matsuyuki.t.aa@m.titech.ac.jp

1.2　Chern-Weil 理論的構成

可微分有向ベクトル束 $E \to B$ に対して, 同伴する主 $SO(n)$-束 $P \to B$ の接続 ∇ を一つ与える. このとき, 対応する曲率形式 $\Omega \in \mathcal{A}^2(P; \mathfrak{so}(n))$ が得られる. 任意の n 次不変多項式 $f \in I(SO(n))$ に対して, 微分形式

$$\Phi_\nabla(f) := f(\underbrace{\Omega, \ldots, \Omega}_{n}) \in \mathcal{A}^{2n}(P/SO(n)) = \mathcal{A}^{2n}(B)$$

が得られる. これは閉形式であり, そのコホモロジー類は接続の取り方によらないことが分かる. さらに, この構成

$$\Phi_\nabla : I(SO(n)) \to \mathcal{A}^\bullet(B)$$

がコホモロジーに誘導する写像 $\Phi : I(SO(n)) \to H^\bullet_{DR}(B)$ は, これは前節の意味での写像と一致していることが知られている. 言い換えると, 可微分ベクトル束に対しては, 接続を与えるごとに特性類の代表元を自然に与えることができる.

2　Chern-Weil 的に構成されるファイバー束の特性類

ファイバー束 $E \to B$ に対して, ファイバー束 (の垂直接束) の計量を一つ与えたとする. この計量はファイバーの Riemann 計量 (の類) の空間 B をパラメータとする変形を与えていると考えることができる.

一方で, 基点付き多様体 X に計量が与えられるたびに Chen 展開と呼ばれるホロノミーを構成することができる.

定理 1（Chen [1, 2]） Riemann 多様体 X に対して, $H = H_1(X; \mathbb{R})$ の生成する完備 Hopf 代数 $\hat{T}H$ の完備 Hopf イデアル I と完備 Hopf 代数同型 $\hat{\mathbb{R}}\pi_1(X) \simeq \hat{T}H/I$ が得られる. (これを Chen 展開と呼ぶ.)

(ファイバーとなる) 基点付き多様体 X の Chen 展開全体を $\Theta(X)$ とする. この集合は, 有限次元多様体の逆極限とみなせ, 通常の多様体と同様に微分形式等を定義できる. Chen 展開の空間 $\Theta(X)$ には, 多様体 X の写像類群

$$\mathcal{M}(X) := \{\ \text{基点と向きを保つ } X \text{ の微分同相のアイソトピー類}\ \}$$

が作用する.

以上の設定において, ファイバー束の計量を用いて, 各ファイバーごとに Chen 展開をとることにより, 滑らかな写像

$$B \to \Theta(X)/\mathcal{M}(X)$$

を得る. ここで, 写像類群 $\mathcal{M}(X)$ は変換関数分の誤差に相当する. ファイバー束の計量は道でつなぐことができるので, この写像が deRham コホモロジーに誘導する写像

$$H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X)) \to H^\bullet_{DR}(B)$$

は計量によらない.

コホモロジー $H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X))$ について考える. 簡単のため, (写像類群を適切に制限するなどして) 計量に対するイデアル I が固定できたとする. つまり, イデアル I を固定した Chen 展開全体を $\Theta(X, I)$ としたとき, ファイバー束の計量が $B \to \Theta(X, I)$ を与えたとする. このとき, $H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X))$ を

$H^\bullet_{DR}(\Theta(X,I)/\mathcal{M}(X))$ に置き換えて考える．空間 $\Theta(X,I)$ には Hopf 代数 $\hat{T}H/I$ の自己同型群 (のある部分群)

$$\mathrm{IAut}(\hat{T}H/I) := \{f \in \mathrm{Aut}(\hat{T}H/I); f(H) \subset \hat{T}^{\geq 2}H/I\}$$

が自由かつ推移的に作用する．よって, $\Theta(X,I)$ は Muarer-Cartan 形式

$$\eta \in \mathcal{A}^1(\Theta(X,I); \mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I))$$

を持つ．ここで, 導分の (ある部分) Lie 代数

$$\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I) := \{X \in \mathrm{Der}(\hat{T}H/I); X(H) \subset \hat{T}^{\geq 2}H/I\}$$

は Lie 群 $\mathrm{IAut}(\hat{T}H/I)$ の Lie 代数であることに注意する． さらに, この平坦接続を用いて, Lie 代数 $\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I)$ の Chevalley-Eilenberg 複体 (次節にて後述) からのチェイン写像

$$C^\bullet_{CE}(\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I)) \to \mathcal{A}^\bullet(\Theta(X,I))$$

が得られる．さらに, この写像は Maurer-Cartan 形式 η の左不変性から, $\mathcal{M}(X)$-同変である．自然な作用 $\mathcal{M}(X) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(H)$ の像を G とすると, 以上をまとめて次の構成を得る．

定理 2（M-Terashima [5]） 基点付き有向ファイバー束 $E \to B$ がファイバー $(X,*)$ のイデアル I に関す条件を満たすとする．このファイバー束の計量が与えられるたびに, チェイン写像

$$C^\bullet_{CE}(\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I))^G \to \mathcal{A}^\bullet(B)$$

が得られ, この写像がコホモロジーに誘導する写像は計量によらない．

ファイバーが曲面の場合は, [3] の結果に相当し, 実際に非自明な特性類を与えていることが分かる．

3 Chevalley-Eilenberg 複体

前節で使った Chevalley-Eilenberg 複体について述べておく．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, $\mathfrak{g}$ が生成する外積代数を

$$C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}) := \Lambda^\bullet \mathfrak{g}$$

とし, 微分を $c \in C^{n-1}_{CE}(\mathfrak{g})$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$d_{CE}(c)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n)$$

と定義する．このとき, $(C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}), d_{CE})$ はチェイン複体になる．これを **Chevalley-Eilenberg 複体**と呼ぶ．このコホモロジーは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のコホモロジーと呼ばれる．

ここで特性類の構成で用いたのは次の性質である: 多様体 M について, $\mathfrak{g}$ 係数の微分形式 $\eta \in A^1(M;\mathfrak{g})$ であり, 平坦性

$$d\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] = 0$$

を満たすものが与えられたとする．このとき, $C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}) \to A^\bullet(M)$ を

$$c \mapsto c(\eta, \ldots, \eta)$$

とすると, これはチェイン写像となる．

4 これからの研究

[6] によれば, 単連結ファイバー束の特性類をある導分のコホモロジーによってホモトピー論的に構成することができる. よって, §2 で構成した特性類は, ファイバーの 1 次以上のホモロジーの情報を用いて, 単連結束の場合にも拡張できるはずである.

Chen 展開は, 多様体の deRham 複体の Hodge 分解から得られる C_∞-極小モデルの情報の一部である. よって, C_∞-極小モデルの空間全体 $Q(X)$ を Chen 展開の空間 $\Theta(X)$ の代わりに用いることにより, より豊富な情報をもつ特性類が得られることが期待される. [4] では, $Q(X)$ の "連結成分" を考えることにより, 同様の構成ができることが分かっている. さらに, $Q(X)$ の連結成分より細かいホモトピーの情報を用いて, [6] にあるような特性類を構成することを考えている.

参考文献

[1] K.T. Chen, *Extension of C^∞ function algebra by integrals and Malcev completion of π_1*, Advances in Math. **23** (1977), no. 2, 181–210.

[2] K.T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 5, 831-879.

[3] N. Kawazumi, *Harmonic Magnus Expansion on the Universal Family of Riemann Surfaces*, arXiv:math/0603158.

[4] H. Kajiura, T. Matsuyuki, and Y. Terashima, *Homotopy theory of A_∞-algebras and characteristic classes of fiber bundles*, arXiv:1605.07904.

[5] T. Matsuyuki, and Y. Terashima, *Characteristic classes of fiber bundles*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016) 3029–3050.

[6] M. Schlessinger and J. Stasheff, *Deformaion theory and rational homotopy type*, U. of North Carolina preprint, 1979, short version: The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory, *J. Pure Appl. Alg.*, **38** (1985), 313–322.