統計多様体とヘッセ多様体における局所同型写像の構成について

佐藤 直飛 (Naoto SATOH)
北海道大学大学院理学院数学専攻

概要

次元の等しい二つの統計多様体の間で統計構造を保つ写像のことを統計同型写像という．本講演では, 局所的にリーマン曲率テンソルと差テンソルが保存されているとき局所統計同型写像が構成できることを紹介し, 特にヘッセ多様体の場合にはヘッセ曲率テンソルと差テンソルが保たれている場合に局所統計同型写像が構成できることを述べる．

1　統計多様体とヘッセ多様体

定義 1.1　なめらかな n 次元多様体 M とその上の捩れのないアファイン接続 ∇ とリーマン接続 g の組 (M, ∇, g) が統計多様体であるとは, $(0,3)$ テンソル場 $C := \nabla g$ が対称であるときをいい, このとき (∇, g) を統計構造という．

統計多様体という名前は次のような例に由来する．

例 1.2　Ω を高々可算集合または $\mathbb{R}^k$ とする．S が $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$ をパラメータとする Ω 上の確率分布族で

$$S = \left\{ p(x;\xi) \;\middle|\; \int_\Omega p(x;\xi)dx = 1,\ p(x;\xi) > 0,\ \xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n \right\}$$

と表されるとき, S を Ω 上の統計モデルという．S は $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ を局所座標系とする n 次元多様体とみなすことができる．このとき, 微分と積分の順序交換可能性などの適当な仮定のもとで, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi$ に対して,

$$g^F_{ij}(\xi) := \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \log p(x;\xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \log p(x;\xi) \right) p(x;\xi)dx \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

とおく．ただし, Ω が高々可算集合の場合も和は積分の形で表すこととする．$g^F(\xi) = (g^F_{ij})$ は n 次実対称行列となり, これを S の Fisher 情報行列という．また, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} := \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 \log p}{\partial \xi^i \xi^j}(x;\xi) + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\partial \log p}{\partial \xi^i}(x;\xi) \frac{\partial \log p}{\partial \xi^j}(x;\xi) \right\} \frac{\partial \log p}{\partial \xi^k}(x;\xi) p(x;\xi)$$

とおくと, $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}$ は S のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を定め, $\nabla^{(\alpha)}$ を α 接続という. このとき, $(\nabla^{(\alpha)}, g^F)$ は Ω 上の統計構造となる.

確率分布族として正規分布族や Poisson 分布族などの指数型分布族と言われるものを考えると, $\nabla^{(1)}$ は平坦になっている. このように平坦な接続が存在する場合には, 平坦接続に関するアファイン座標系 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ に関して, あるなめらかな関数 ψ が存在して計量 g を

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j}$$

とヘッシアンで書くことができる. そこで平坦な接続を持つ統計多様体を次のように定義する.

定義 1.3 統計多様体で ∇ が平坦であるとき, (M, ∇, g) をヘッセ多様体といい, (∇, g) をヘッセ構造という.

次元の等しい二つの統計多様体 (M, ∇, g) と $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g})$ が統計多様体として同じになるのは, それらの間に微分同型写像 $\varphi : M \to \overline{M}$ が存在して任意のベクトル場 X, Y, Z に対して $C(X, Y, Z) = \overline{C}(\varphi_* X, \varphi_* Y, \varphi_* Z)$ が成り立つときである. したがって統計微分同型写像を次のように定義する.

定義 1.4 (M, ∇, g) と $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g})$ を同次元の統計多様体とする. このとき, $\varphi : M \to \overline{M}$ が統計同型写像であるとは, φ が等長写像でかつアファイン接続同型であるとき, すなわち

$$\begin{aligned} g(X,\ Y) &= \overline{g}(\varphi_* X,\ \varphi_* Y), \\ \varphi_*(\nabla_X Y) &= \overline{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y \end{aligned}$$

が任意のベクトル場 X, Y に対して成り立つときをいう.

次に統計多様体に関して基本的な概念を定義する.

定義 1.5 (1) (M, g) をリーマン多様体とし, ∇ を M 上のアファイン接続とする. このとき, ∇^* が ∇ の g に関する双対接続であるとは

$$X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

をみたすことをいう. (∇, g) が M 上の統計構造ならば, (∇^*, g) も M 上の統計構造となっている.
(2) 統計構造 (∇, g) に対して, 差テンソル $K := K^{(\nabla, g)} \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ を

$$K(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y$$

で定義する. ここで, ∇^g は g の Levi-Civita 接続である.

M 上のアファイン接続 ∇ に対して

$$R^{\nabla}(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

と定義すると, R^{∇} は $(1,3)$ テンソル場となり, これを ∇ に関する曲率テンソルと呼ぶ. 以下簡単のため, $R := R^{\nabla}$, $R^g := R^{\nabla^g}$, $R^* := R^{\nabla^*}$ と書くこととする.

ヘッセ多様体に対して差テンソル K を用いてヘッセ曲率を次のように定義する.

定義 1.6 ヘッセ構造 (∇, g) に対して,

$$H(X,Y)Z := -(\nabla K)(Y,Z;X), \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM)$$

と定義すると, これは M 上の $(1,3)$ テンソル場で, これをヘッセ曲率テンソルという.

2 統計多様体上の局所統計同型写像

(M,∇,g) と $(\overline{M},\overline{\nabla},\overline{g})$ を同次元の統計多様体とする. $p \in M$ と $\overline{p} \in \overline{M}$ をとって固定し, 線型等長写像 $\Phi : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ が与えられているとする. また凸開集合 $\mathcal{U}_p \subset T_pM$ と $\overline{\mathcal{U}}_{\overline{p}} \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ を $U := \mathrm{Exp}_p(\mathcal{U}_p)$, $\overline{U} := \overline{\mathrm{Exp}}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{U}}_{\overline{p}})$ がそれぞれ p と $\overline{p}$ の ∇^g に関する正規座標近傍となるようにとる. すると微分同型写像 $\varphi : U \to \overline{U}$ が

$$\varphi := \overline{\mathrm{Exp}}_{\overline{p}} \circ \Phi \circ (\mathrm{Exp}_p)^{-1} \tag{1}$$

によって定義される. p を始点とする ∇^g に関する測地線 γ が任意に与えられたとき, $\overline{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ とおくと, $\overline{\gamma}$ は $\overline{U}$ 上の $\overline{p}$ を始点とする $\nabla^{\overline{g}}$ に関しての測地線となる. γ と $\overline{\gamma}$ の終点をそれぞれ q と $\overline{q} := \varphi(q)$ とし, 線型等長写像 $\Phi_q : T_qM \to T_{\overline{q}}\overline{M}$ を

$$\Phi_q := \overline{P}_{\overline{\gamma}} \circ \Phi \circ (P_\gamma)^{-1} \tag{2}$$

によって定義する. ここで $P_\gamma : T_pM \to T_qM$ と $\overline{P}_{\overline{\gamma}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \to T_{\overline{q}}\overline{M}$ はそれぞれ ∇^g と $\nabla^{\overline{g}}$ に関しての γ と $\overline{\gamma}$ に沿った平行移動であり, これらは線型等長写像である.

このような設定のもと, 次の結果を得た.

定理 2.1 $(M,\ \nabla,\ g)$ と $(\overline{M},\ \overline{\nabla},\ \overline{g})$ を同次元の統計多様体とし, R^g を $R^{\overline{g}}$ をそれぞれのリーマン曲率テンソルとし, K と $\overline{K}$ をそれぞれの差テンソルとする. そして φ と Φ_q を上の設定の (1), (2) のようにとる. このとき U 上の p を始点とする任意の ∇^g 測地線 γ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi_q(R^g(u,\ v)w) = R^{\overline{g}}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v))\Phi_q(w),\\
&\Phi_q(K(u,\ v)) = \overline{K}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v)), \qquad (u,\ v,\ w \in T_qM),
\end{aligned}$$

が成り立つとき, φ は U から $\overline{U}$ への統計同型写像となる.

さらに統計多様体がヘッセ多様体のとき, 次の定理を得た.

定理 2.2 $(M,\ \nabla,\ g)$ と $(\overline{M},\ \overline{\nabla},\ \overline{g})$ を同次元のヘッセ多様体とし, K と $\overline{K}$ をそれぞれの差テンソルとし H と $\overline{H}$ をそれぞれのヘッセ曲率テンソルとする. そして φ と Φ_q を上の設定の (1), (2) の

ようにとる．このとき U 上の p を始点とする任意の ∇^g 測地線 γ に対して

$$\Phi_q(K(u,\ v)) = \overline{K}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v)),$$
$$\Phi_q(H(u,\ v)w) = \overline{H}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v))\Phi_q(w) \qquad (u,\ v,\ w \in T_qM),$$

が成り立つとき, φ は U から $\overline{U}$ への統計同型写像となる．

参考文献

[1] S. Amari, Information Geometry and Its Applications, Appl. Math. Sci., vol. 194, Springer. (2016).

[2] S. Amari and H. Nagaoka, Method of Information Geometry, Transl. Math Monogr., vol. 191, Amer. Math. Soc. (2000).

[3] N. Ay, J. Jost, H.V. Le and L. Schwachhöfer, Information Geometry, Springer, (2017).

[4] H. Furuhata, Hypersurfaces in statistical manifolds, Differ. Geom. Appl., 27, (2009), 420–429.

[5] T. Kurose, On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds, Tôhoku Math. J., 46, (1994), 427–433.

[6] S.L. Lauritzen, Statistical manifolds, in Differential Geometry in Statistical Inferences, IMS Lecture Notes Monograph Series 10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward California (1987).

[7] K. Nomizu and T. Sasaki, Affine differential geometry, Cambrige University Press, (1994).

[8] N. Satoh, Local statistical diffeomorphisms, Preprint.

[9] H. Shima, The Geometry of Hessian Structure, World Scientific Publ., (2007).

[10] M. Takeuchi, Lie Groups II, Transl. Math Monogr., vol. 85, 113–260, Amer. Math. Soc. (1991).

[11] J. A. Wolf, Spaces of Constant Curvature –6th ed., Amer. Math. Soc. (2011).