非有界な関数を平均曲率に持つ特異回転面について

寺本 圭佑 (Keisuke Teramoto)*
神戸大学大学院理学研究科数学専攻 D3

導入

$I \subset \boldsymbol{R}$ を区間とし, $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級の平面曲線とする. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(y > 0)$ と表し, γ の x 軸に関する回転面を

$$s(t,\theta) = \big(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta\big) \tag{0.1}$$

とする. 曲線 γ を回転面 s の**生成曲線**と呼ぶ. $s(t,\theta)$ の平均曲率を $H(t)$ で表す. I 上で与えられた C^∞ 級関数 $H(t)$ に対して, 回転面 $s(t,\theta)$ が $H(t)$ を平均曲率として持つための生成曲線 $(x(t), y(t))$ の具体的な表示が劒持勝衛氏によって与えられた [6]. さらに, 回転面の周期性についての研究も行われている [7].

一方, 近年, 特異曲線や特異曲面に関する多くの研究が行われている ([1–5, 9–12]). もし生成曲線 γ が正則なら, 平均曲率 H は I 上可微分であるが, γ が特異点を持つとき, H は非有界になることがある [11] (see also [9]). 本講演では, P を離散集合とし, $I \setminus P$ 上で与えられた C^∞ 級関数 H に対して, 回転面 s の平均曲率が H である生成曲線 $(x(t), y(t))$ の具体的な表示を紹介する. また, 周期性についても紹介する.

本講演の内容は, L.F. Martins 氏 (UNESP), 佐治健太郎氏 (神戸大学), S. P. dos Santos 氏 (UNESP) との共同研究 [8] に基づく.

1 特異回転面の構成

$I \subset \boldsymbol{R}$ を区間, $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 曲線とする. 曲線 γ を $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ とおき, 任意の $t \in I$ に対して, $y(t) > 0$ を満たすと仮定する. ここで, 次のことを仮定する: ある関数 $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して, $\gamma'(t)$ と $e(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ が一次従属になる. このとき,

$$\gamma'(t) = l(t)e(t), \quad e(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

を満たす関数 $l : I \to \boldsymbol{R}$ を得る. これは, γ が **フロンタル**であるということと同値である. (詳細は Section 2). また, $p \in I$ が γ の特異点であることと $l(p) = 0$ となることは同値である. $P = l^{-1}(0)$ とし, P は離散集合であると仮定する. 回転面 s の単位法ベクトル ν を

$$\nu(t,\theta) = \big(\sin\varphi(t), -\cos\varphi(t)\cos\theta, -\cos\varphi(t)\sin\theta\big) \tag{1.1}$$

---

*teramoto@math.kobe-u.ac.jp
2010 Mathematics Subject classification. Primary 57R45 ; Secondary 53A05.
Keywords and Phrases. Cuspidal edge, mean curvature
本研究は JSPS 科研費 17J02151 の助成を受けたものです.

と取る. このとき, s の正則点集合 $I \setminus P$ 上で平均曲率 H は C^∞ 級関数である. さらに, 次を得る.

Lemma 1.1. 関数 Hl は I 上の C^∞ 級関数に拡張できる.

フロンタルの平均曲率の特異点付近での挙動の詳細は [9, Proposition 2.6] を参照.

逆に, I 上で Hl が C^∞ 級関数となるように与えられた関数 $H : I \setminus P \to \boldsymbol{R}$ と, $l : I \to \boldsymbol{R}$ ($P = l^{-1}(0)$ は離散集合) に対して, (1.1) に関する平均曲率が H であり, 生成曲線 $\gamma = (x(t), y(t))$ が, $\gamma' = l(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ を満たす回転面を求めよう. このとき, x, y は, 次の微分方程式を満たす:

$$2H(t)y(t)l(t) - l(t)\cos\varphi(t) + y(t)\varphi'(t) = 0. \tag{1.2}$$

[6] の方法にしたがって, この方程式を

$$(x'(t), y'(t)) = l(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) \tag{1.3}$$

の条件下で解く. $z(t) = y(t)\sin\varphi(t) + \sqrt{-1}y(t)\cos\varphi(t)$ とおくと, 方程式 (1.2) は,

$$z'(t) - 2\sqrt{-1}H(t)z(t)l(t) - l(t) = 0$$

に変形でき, この方程式の一般解は,

$$\begin{aligned} z(t) = &(F(t) - c_1)\sin\eta(t) + (G(t) - c_2)\cos\eta(t) \\ &+ \sqrt{-1}\big((G(t) - c_2)\sin\eta(t) - (F(t) - c_1)\cos\eta(t)\big) \end{aligned}$$

である. ただし, $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ であり,

$$F(t) = \int_0^t l(u)\sin\eta(u)\,du, \quad G(t) = \int_0^t l(u)\cos\eta(u)\,du, \quad \eta(u) = \int_0^u 2l(v)H(v)\,dv.$$

$y(t)^2 = |z(t)|^2$ と $x'(t) = l(t)\cos\varphi(t) = l(t)(z(t) - \bar{z}(t))/(2\sqrt{-1}y(t))$ から,

$$y(t) = ((F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2)^{1/2}, \tag{1.4}$$

$$x'(t) = \frac{F'(t)(G(t) - c_2) - G'(t)(F(t) - c_1)}{((F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2)^{1/2}} = \frac{F'(t)(G(t) - c_2) - G'(t)(F(t) - c_1)}{y(t)} \tag{1.5}$$

を得る. これが求めたかった式である. 初期値 c_1, c_2 は, 考えている定義域上で, $(F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2 > 0$ を満たすように取る.

2　生成曲線の特異点

この節では, 生成曲線や回転面に現れる特異点の判定条件について述べる. γ の特異点 p が, 3/2-**カスプ** であるとは, γ の p における写像芽が $t \mapsto (t^2, t^3)$ に 0 おいて $\mathcal{A}$-同値

となるときをいう. (二つの写像芽 $f_1, f_2 : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が $\mathcal{A}$-**同値** であるとは, 微分同相写像芽 $S : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^m, 0)$, $T : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が存在し, $f_2 \circ S = T \circ f_1$ を満たすときをいう.) 同様に,γ の特異点 p が, j/i-**カスプ** ($(i,j) = (2,5), (3,4), (3,5)$) であるとは, γ の p における写像芽が $t \mapsto (t^i, t^j)$ に 0 おいて $\mathcal{A}$-同値となるときをいう. これらの特異点に関する判定法が知られている.

点 p における写像芽 γ が **フロンタル**であるとは, 写像芽 $n : (\boldsymbol{R}, p) \to (\boldsymbol{R}^2, 0)$ が存在し, 任意の t に対して, $|n| = 1$, $\gamma' \cdot n = 0$ を満たすときをいう. フロンタルが **波面**であるとは, 組 (γ, n) がはめ込みを与えるときをいう. γ が, p において 3/2-カスプ または, 4/3-カスプを持つとき, 波面であり, γ が p において 5/2-カスプ または 5/3-カスプを持つとき, フロンタルだが波面ではない. 第 1 節で求めた曲線に対して次が成り立つ.

Proposition 2.1. *(1.4), (1.5) によって与えられる曲線 $\gamma = (x, y)$ はフロンタルである. さらに, $l(p) = 0$ のとき, γ が p で波面となるための必要十分条件は $\eta'(p) \neq 0$ を満たすことである.*

さらに, 以下の判定条件が成立する.

Proposition 2.2. *γ を上述のものとし, $l(p) = 0$ とする. このとき, 次が成り立つ.*

(1) γ が p で 3/2-カスプを持つための必要十分条件は, $l'\eta' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(2) γ が p で 5/2-カスプを持つための必要十分条件は, $l' \neq 0$, $\eta' = 0$, $l''\eta'' - l'\eta''' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(3) γ が p で 4/3-カスプを持つための必要十分条件は, $l' = 0$ と $\eta' l'' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(4) γ が p で 5/3-カスプを持つための必要十分条件は, $l' = \eta' = 0$ と $\eta'' l'' \neq 0$ が p で成り立つことである.

Example 2.3. $H = 1/t$, $l = t$ とし, $c_1 = c_2 = 1/10$ とおく. このとき, Proposition 2.2 から, γ は $t = 0$ で 3/2-カスプを持つ. 生成曲線は Figure 1 のようになる.

Example 2.4. $H = 1 + t$, $l = t$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とする. Proposition 2.2 より, γ は $t = 0$ で 5/2-カスプを持つ. $H = 1/t^2$, $l = t^2$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とする. このとき, Proposition 2.2 から, γ は $t = 0$ で 4/3-カスプを持つ. $H = 1/t$, $l = t^2$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とすると, Proposition 2.2 より, γ は $t = 0$ で 5/3-カスプを持つ. 生成曲線は Figure 2 のようになる. 特異点は矢印で示されている部分.

Proposition 2.2 により, 回転面に現れる特異点を調べることができる. 写像 $f : (\boldsymbol{R}^2, q) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ の特異点 q が j/i-**カスプ辺** であるとは, f が q において, 原点 0 における写像芽 $(u, v) \mapsto (u^i, u^j, v)$ と $\mathcal{A}$-同値なときをいう. $y > 0$ のとき, 写像芽 $(x, y, z) \mapsto (x, y\cos z, y\sin z)$ は微分同相写像芽であるから, (0.1) で与えられる写像芽 s が (p, θ) で, j/i-カスプ辺 を持つための必要十分条件は, 生成曲線 $\gamma = (x, y)$ が p で j/i-カスプを持つことである.

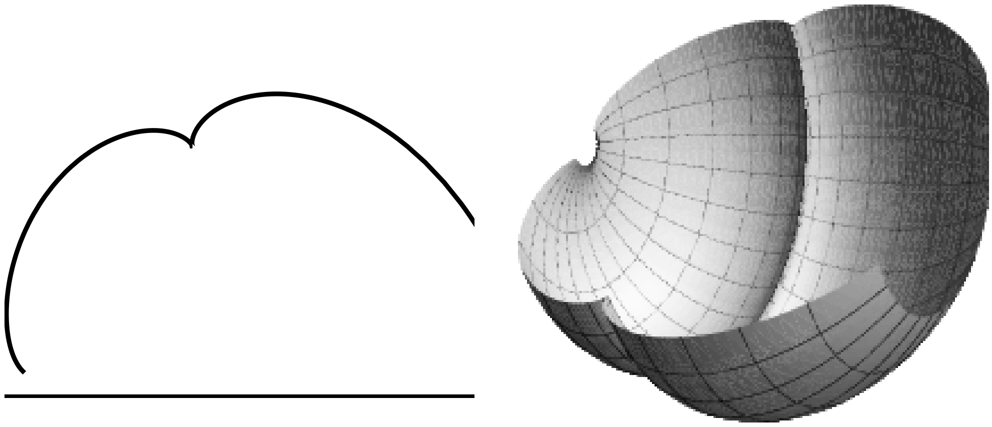

Figure 1: Example 2.3 における生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

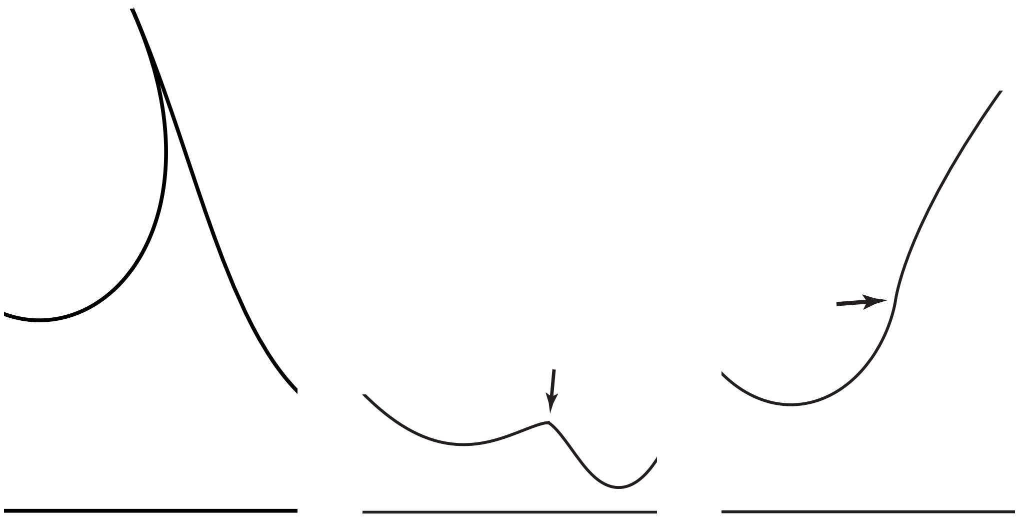

Figure 2: Example 2.4 の生成曲線. 水平線は x 軸を表す.

3　周期性

この節では, H と l が周期的であるとき, 曲面が周期的になる条件を紹介する. 正則な場合には [7] で与えられていることに注意する. (0.1) で与えられる回転面の生成曲線 (x, y) が周期 L の**周期を持つ**とは, ある正数 $T > 0$ が存在し, $x(s+L) = x(x) + T$ と $y(s+L) = y(s)$ が成り立つときをいう. このとき, 次の周期性に関する条件を得る.

Theorem 3.1. *$H : \boldsymbol{R} \setminus P \to \boldsymbol{R}$ と $l : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が同じ周期 L を持つ C^∞ 級周期関数とする. ただし, $P = l^{-1}(0)$ は離散集合で, Hl が $\boldsymbol{R}$ 上の C^∞ 級関数に拡張できるとする. このとき, (1.5), (1.4) で与えられる (1.2) の解 (x, y) が周期的であるための必要十分条件は, $1 - \cos\eta(L) \neq 0$ かつ*

$$\cos\left(\varphi(0) + \frac{\eta(L)}{2}\right) \int_0^L l(u) \sin\eta(u)\, du = \sin\left(\varphi(0) + \frac{\eta(L)}{2}\right) \int_0^L l(u) \cos\eta(u)\, du, \quad (3.1)$$

または, $1-\cos\eta(L)=0$ かつ

$$\int_0^L l(u)\sin\eta(u)\,du = \int_0^L l(u)\cos\eta(u)\,du = 0 \tag{3.2}$$

である. ただし, $(x'(0), y'(0)) = l(0)(\cos\varphi(0), \sin\varphi(0))$.

もし,生成曲線が正則なら, 上の条件は [7, Theorem 1] で与えられた条件と等しいことに注意する.

Example 3.2. $H = 1/\sin t$, $l = \sin t$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3/4$ とする. これは, Theorem 3.1 の条件を満たしているので,生成曲線は周期的になる生成曲線の像は Figure 3 である. 生成曲線に現れる特異点はすべて 3/2-カスプである.

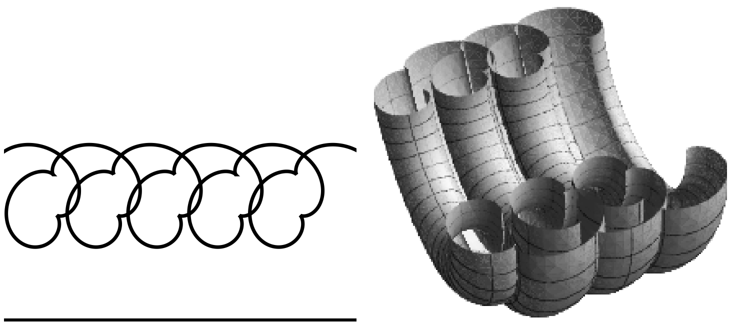

Figure 3: Example 3.2 の生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

Example 3.3. $H = 1/\sin^2 t$, $l = \sin^2 t$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とする. これは, Theorem 3.1 の条件を満たさないので, 生成曲線は周期的でない (Figure 4). 現れる特異点は 4/3-カスプであり, それらは矢印で示された部分に現れている.

References

[1] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on a crosscap*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), no. 1, 19–39.

[2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35–67.

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolutes of fronts in the Euclidean plane*, J. Singul. **10** (2014), 92–107.

[4] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications*, arXiv:1601.06265.

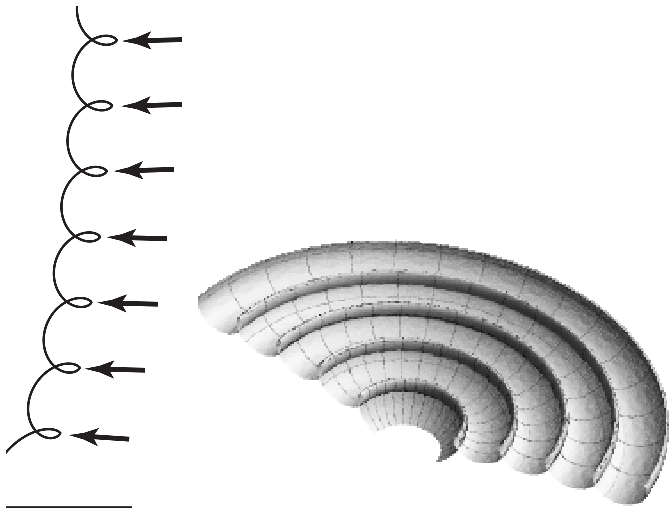

Figure 4: Example 3.3 の生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

[5] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[6] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **32** (1980), no. 1, 147–153.

[7] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with periodic mean curvature*, Osaka J. Math. **40** (2003), no. 3, 687–696.

[8] L. F. Martins, K. Saji, S. P. dos Santos and K. Teramoto, *Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature*, submitted.

[9] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. Math. & Statistics, 2016, 247–282.

[10] R. Oset Sinha and F. Tari, *Flat geometry of cuspidal edges*, to appear in Osaka J. Math. arXiv:1610.08702.

[11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

[12] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), no. 3, 285–299.