On generic structures of amalgamation classes of finite structures

岡部 峻典 (Shunsuke Okabe)
神戸大学大学院システム情報学研究科

概 要

ランダムグラフは任意の有限グラフを誘導部分グラフとして含み, 他にも様々な良い性質をもつ. これは, 実は有限グラフ全体からなるクラスの持つ性質によるもので, その性質をもつクラスが作り出すグラフのことを generic グラフと呼ぶ. その性質を一般化することで, モデル理論における有限構造のクラスについても同様の議論をおこなうことができ, それによって作られる可算無限構造を generic 構造と呼ぶ.

また, ランダムグラフの自己同型群は単純群であることが知られており, 特に, 恒等的でない任意の自己同型写像 σ に対し, 他のすべての自己同型写像は σ の共役元 3 つの積として表現することができる. このことは, 一般の generic 構造についてもある程度同様に成り立ち, ある条件のもとで, その積の数は 32 に抑えられることが示されている. 本研究において, 同条件のもとでこの数を 12 まで減らすことができるという結果を得た. よって本講演では, generic 構造の構成法と, 主結果の証明の概略を紹介する.

1 言語と構造

まず, モデル理論的な基本事項について述べる.

定義 1.1. ある記号の集合 $\mathcal{L} := \{R_i \mid i \in I\}$ を考える[1]. この $\mathcal{L}$ のことを**言語 (language)** といい, 各 R_i を関係記号と呼ぶ. また, R_i に対して自然数 $a(R_i) > 0$ を割り当て, この数を R_i の**項数 (arity)** と呼ぶ.

ある集合 A と $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^{a(R_i)}$ について, $\mathcal{A} := \langle A; R_i^{\mathcal{A}} : i \in I\rangle$ を **$\mathcal{L}$-構造 (structure)** と呼ぶ. 各 $R_i^{\mathcal{A}}$ を, R_i の $\mathcal{A}$ での**解釈 (interpretation)** と呼ぶ. しばしば構造と領域は同一視される. 以下, 単に A と書いても $\mathcal{L}$-構造をあらわしているものとする.

例 1.2. (1) $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$(すなわち $a(E) = 2$) とし, $\mathcal{L}$-構造 A を, E について非反射的かつ対称的な集合とすると, A は単純グラフである.

(2) $\mathcal{L} = \{\cdot(x, y, z)\}$ とし, $\mathcal{L}$-構造 G を,

---

[1] 一般には, 関係記号だけでなく関数記号 (と定数記号) も言語として考えることができるが, ここでは関係記号のみからなる言語だけを考える.

(i) (演算) 任意の $a, b \in G$ について, $c \in G$ が一意に存在して $(a, b, c) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(ii) (結合性) 任意の $a, b, c \in G$ について, ある $x, y \in G$ について $(a, b, x), (b, c, y) \in \cdot^G$ となっているとき, ある $z \in G$ が存在して, $(x, c, z), (a, y, z) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(iii) (単位元) ある元 $1 \in G$ 存在して, 任意の $a \in G$ について $(a, 1, a) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(iv) (逆元) 任意の $a \in G$ について, $a^{-1} \in G$ が存在して $(a, a^{-1}, 1), (a^{-1}, a, 1) \in \cdot^G$ が成り立つ.

の 4 つをみたす構造とすると, G は群[2]である.

このように数学的な構造を定義することによって, グラフ理論における誘導部分グラフや群論における部分群, また構造間の同型などの概念を統一的に考えることができる.

定義 1.3. 言語 $\mathcal{L}$ を固定する.

(1) A, B を $\mathcal{L}$-構造とする. 単射 $f : A \to B$ が**埋め込み (embedding)** であるとは, 任意の $R \in \mathcal{L}$ について, $\bar{a} \in R^A \iff f(\bar{a}) \in R^B$ がすべての $\bar{a} \in A^{a(R)}$ で成り立っていることをいう.

(2) 埋め込み f が包含写像であるとき, A は B の**部分構造 (substructure)** であるといい, 集合の包含記号を用いて $A \subseteq B$ と書く.

(3) 埋め込み f が全単射であるとき, f を**同型写像 (isomorphism)** と呼び, $A \cong B$ と書く. また, この A と B は**同型 (isomorphic)** であるという. また, A と B を並べた順序対 $\bar{a} = (a_i : i \in I), \bar{b} = (b_i : i \in I)$ について, $f : \bar{a} \to \bar{b}$ がすべての $i \in I$ で $f(a_i) = b_i$ となっているとき, $\bar{a} \equiv \bar{b}$ とも書く.

(4) ある埋め込み $f : B \to C$ が $A \subseteq B \cap C$ を元ごとに固定するとき, $B \cong_A C$ と書き, B と C は A 上で同型であるという. $\bar{b} \equiv_A \bar{c}$ についても同様である.

定義 1.4. M を $\mathcal{L}$-(可算無限) 構造とする.

(1) $\mathrm{Age}(M)$ で, M に埋め込める $\mathcal{L}$-有限構造全体からなるクラスをあらわす.

(2) $\mathrm{Aut}(M)$ で, M 上の自己同型群をあらわす. また, $A \subseteq M$ について, $\mathrm{Aut}(M/A)$ を A を元ごとに固定する自己同型写像全体からなる $\mathrm{Aut}(M)$ の部分群とする.

---

[2]通常, 群の言語は演算をあらわす 2 変数関数と単位元をあらわす定数記号や, 必要ならば逆元を返す 1 変数関数などによって定義されるが, 上記のように 3 項関係によっても定義することが可能である. このように, 数学的構造を定義する言語には自由度があるが, 使用する言語によって量化記号消去やモデル完全性などの, モデル理論的に重要な性質の成否が変わる.

2 amalgamation class と generic 構造

構造のクラスを考えるにあたって, 空集合が構造として含まれている方が何かと都合がよい.

そこでこれ以降, 空集合は (任意の $\mathcal{L}$ についての)$\mathcal{L}$-構造とみなす.

定義 2.1. $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-有限構造のクラスで, 同型写像で閉じているものとする.

(1) $\mathcal{K}$ が **HP (Hereditary Property)** を持つとは, 任意の $A \in \mathcal{K}$ に対し, $B \subseteq A$ ならば $B \in \mathcal{K}$ であることをいう.

(2) $\mathcal{K}$ が **AP (Amalgamation Property)** を持つとは, 任意の $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ に対し, A から B_1, B_2 それぞれへの埋め込み f_1, f_2 が存在するならば, $C \in \mathcal{K}$ と B_1, B_2 から C への埋め込み g_1, g_2 が存在し, $g_1 \circ f_1(a) = g_2 \circ f_2(a)$ $(\forall a \in A)$ が成り立つことをいう.

$\mathcal{K}$ が HP と AP をともに持つとき, $\mathcal{K}$ を **amalgamation class** と呼ぶ.

命題 2.2. (R.Fraïssé, 1953[1]) $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$ についての amalgamation class とする.

このとき, $\mathcal{L}$-可算無限構造 M が (同型を除いて一意に) 存在し, 以下が成り立つ:

- $\mathrm{Age}(M) = \mathcal{K}$,
- M は **homogeneous** である. すなわち, 互いに同型な任意の $A, B \in M$ について, 任意の同型写像 $f : A \to B$ は M 全体の自己同型写像に拡大できる.

この M のことを $\mathcal{K}$ についての **generic 構造**という. また逆に, ある可算構造 M が homogeneous であるとき, $\mathrm{Age}(M)$ は amalgamation class である. このため, generic 構造のことを単に **homogeneous な構造**ともいう.

例 2.3. (1) $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$ とし, $\mathcal{K}$ をすべての有限単純グラフからなるクラスとする. このとき, $\mathcal{K}$ は amalgamation class であり, $\mathcal{K}$ から得られる M はランダムグラフになる.

(2) $\mathcal{L} = \{d(x, y) = r \mid r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$ とし, $\mathcal{K}$ を有理距離をもつすべての有限距離空間とする. このとき, M は有理距離を持つ Urysohn 空間になる.

モデル理論において, 非常に大きい, すべての議論がその中でおこなえるような特殊な構造を考えることがしばしばあり, homogeinity はそのような構造に必要な条件のひとつである. その意味で, generic 構造はモデル理論的に重要な対象であるといえる.

例えば, 次のような主張が成り立つ. この補題は, 本講演の主結果の証明にも部分的に用いられる.

補題 2.4. generic 構造 M の有限部分構造上の各同型写像 f について,

$$\mathcal{O}_f := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \mid \sigma \text{は } f \text{ を拡大して得られる自己同型写像 }\}$$

を開基とする位相を $\mathrm{Aut}(M)$ に入れると, $\mathrm{Aut}(M)$ は Hausdorff なポーランド群となる.

主結果の主張に言明するにあたって, AP よりも少し強い性質を導入する必要がある.

定義 2.5. $\mathcal{L}$-generic 構造 M を固定する. $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ について, $A \supseteq B \cap C$ かつ任意の $R(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$ に対し, $B \cup C$ の元の列 $a_1, \ldots, a_n$ で, B と C 両方にまたがっていてかつ $R(a_1, \ldots, a_n)$ が成り立っているようなものがないとする. このとき, $\mathcal{L}$-構造 $A \cup B \cup C$ を直和の記号を用いて $B \oplus_A C$ と書き, B と C の A 上の **free amalgam** と呼ぶ. また, A, B, C について上記の関係が成り立っていることを, $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C$ などと書いてあらわし, B と C は A 上独立[3]であるという.

定義 2.6. amalgamation class $\mathcal{K}$ が **FAP (Free Amalgamation Property)** をもつ, あるいは $\mathcal{K}$ の generic 構造 M が **free homogeneous** であるとは, 任意の $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ について, うまく $B' \cong_A B, C' \cong_A C$ をとれば, $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C'$ が成り立つことをいう.

注意 2.7. M を free homogeneous な構造とする.

(1) 任意の $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ に対し, $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ をうまくとれば $\sigma(B) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C$ が成り立つ.

(2) (推移性) $A, B, C, D \subseteq_{\text{fin}} M$ について, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_B C$ かつ $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{B \cup C} D$ ならば, かつそのときに限り $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_B C \cup D$ である.

(3) (定常性) $A, B \subseteq_{\text{fin}} M$ と $\bar{a} \equiv_A \bar{a}'$ なる $\bar{a}, \bar{a}' \in M^d$ について, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B$ かつ $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B$ ならば, $\bar{a} \equiv_{AB} \bar{a}'$ である.

例 2.8. ランダムグラフは free homogeneous な構造でもある.

3 主結果

まず, ランダムグラフ上の自己同型群についての事実について述べる.

命題 3.1. (J.K.Truss, 2003[5]) ランダムグラフ M 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ は単純群である. また, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \setminus \{\mathrm{id}\}$ について, すべての $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ を σ の共役元 3 つの積であらわすことができる.

このことは, 一般の generic 構造についての主張としては, 次が成り立つことが知られている.

命題 3.2. (D.Macpherson, K.Tent, 2011[6]) M を free homogeneous な構造とし, $\mathrm{Aut}(M)$ が M への作用として推移的かつ M の対称群 $\mathrm{Sym}(M)$ と異なるとする. このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ は単純群である.

また, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \setminus \{\mathrm{id}\}$ について, すべての $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ を σ または σ^{-1} の共役元 32 個の積であらわせる.

[3] この独立という関係は "よい" 関係であり, ベクトル空間における基底の独立性や, 代数的閉体における超越次元を意識した用語である. じっさい, モデル理論においてはこれらの独立概念は統一的に扱うことができる. このように, 独立性をうまく扱うことのできる理論のことを単純であるといい, 単純な理論の研究はモデル理論研究におけるメインストリームのひとつである.

本研究において, この 32 という数を改良することに成功した.

定理 3.3. M を free homogeneous な構造とし, $\mathrm{Aut}(M)$ が推移的かつ $\mathrm{Sym}(M)$ と異なるとする. このとき, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \setminus \{\mathrm{id}\}$ について, すべての $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ を σ または σ^{-1} の共役元 12 個の積であらわせる.

4 今後の展望

AP や FAP より弱い概念として, 部分構造としての関係 "$\subseteq$" に他の条件を付け加えた closed という関係 "$<$" を考え, その関係のもとでのみ FAP ができるようなクラスを考えることがある. すなわち, $A, B, C \in \mathcal{K}$ について, $A < B, C$ ならば $B \oplus_A C \in \mathcal{K}$ が成り立っているようなクラス $\mathcal{K}$ を考えるのである.

具体的には, 例えばグラフの言語において, 実数 $0 < \alpha < 1$ を固定し, グラフの次元 δ_α を定義する. すなわち, $\delta_\alpha(A) := |A| - \alpha|E^A|$ とする. そこで, $A \subseteq B$ について, $A <_\alpha B$ を任意の $A \subsetneq X \subseteq B$ に対して $\delta_\alpha(X) - \delta_\alpha(A) > 0$ であると定義する.

これに関して, generic 構造と似た構造を構成することができる.

命題 4.1. $(\mathcal{K}, <)$ が上記の意味で free amalgamation class であるとき, $\mathcal{L}$-可算構造 M が (同型を除いて一意に) 存在し, 以下が成り立つ:

- 任意の $A \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ について, $B \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ が存在し, $A \subseteq B < M$ が成り立つ.
- 任意の $A \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ について, $A \in \mathcal{K}$ である.
- $A < M$ かつ $A < B$ であるような任意の $A, B \in \mathcal{K}$ について, $B' \cong_A B$ が存在して $B' \subseteq M$ となる.

例えば, 上記の $<_\alpha$ によって構成されるグラフは, Shelah-Spencer グラフと呼ばれる, 非常に辺の結ばれる確率の小さい可算グラフに一致する.

これらの構造に関して, 次のような予想を立てることができる.

予想 4.2. free amalgamation class $(\mathcal{K}, <)$ について, M を上記の命題によって構成された可算構造とする. $\mathrm{Aut}(M)$ が推移的かつ $\mathrm{Sym}(M)$ と異なるとき, $\mathrm{Aut}(M)$ は単純群である.

参考文献

[1] R. Fraïssé, *Sur certaines relations qui généralisent l'order des nombres rationnels*, C. R. Acad. sci. Paris 237 (1953) 540-542.

[2] P. J. Cameron, *Oligomorphis Permutation Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 152, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, New York, 1995.

[4] W. Hodges, *Model theory, bolume 42*, Cambridge University Press, 1993.

[5] J.K.Truss, *The automorphism group of the random graph: four conjugates good, three conjugates better*, Discrete Math. 268 (2003) 257-271.

[6] D.Macpherson, K.Tent, *Simplicity of some automorphism groups*, Journal of Algebra, Volume 342, Issue 1, pages 40-52, 2011.

[7] E.Hrushovski, *A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane*, preprint, 1988.

[8] F.O.Wagner, *Simple Theories*, Kluwer, Dordrecht, 2000.