自己入射中山多元環の Hochshild extension algebra の表現について

鯉江 秀行 (Hideyuki Koie)
東京理科大学理学研究科数学専攻

1 Hochschild extension algebra

K を代数的閉体, A を有限次元 basic$K$-多元環とし, D を標準双対関手 $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ とする. 最初に Hochschild 拡大の定義と基本的な性質について述べる.

Definition 1. A の $D(A)$ による Hochschild 拡大とは, 短完全系列

$$0 \longrightarrow D(A) \xrightarrow{\kappa} T \xrightarrow{\rho} A \longrightarrow 0$$

のことである. ここで T は K-多元環, ρ は全射環準同型, κ は両側 T-加群としての単射準同型である. また $(D(A))$ は両側 A-加群であるので, ρ を通して両側 T-加群とみなしている. このとき T を A の $D(A)$ による Hochschild 拡大環という.

Definition 2. Hochschild 拡大 $0 \longrightarrow D(A) \xrightarrow{\kappa} T \xrightarrow{\rho} A \longrightarrow 0$ が splittable であるとは, ある環準同型 $\rho' : A \to T$ が存在して $\rho\rho' = \mathrm{id}_A$ となることである.

Definition 3. 2 つの Hochschid 拡大 (F) と (F') が同値であるとは, 次の図式を可換にするような K-多元環準同型 $\iota : T \to T'$ が存在することをいう：

$$\begin{tikzcd}
(F) & 0 \arrow[r] & D(A) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
(F') & 0 \arrow[r] & D(A) \arrow[r] & T' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hochschild 拡大の同値類全体を $F(A, D(A))$ と書く.

次に Hochschild 拡大環の積構造を考える. K-双線形写像 $\alpha : A \times A \to D(A)$ が任意の $a, b, c \in A$ に対して

$$a\alpha(b, c) - \alpha(ab, c) + \alpha(a, bc) - \alpha(a, b)c = 0 \tag{1.1}$$

をみたすとき, α を 2-cocycle という. この α を用いて, K-線形空間 $A \oplus D(A)$ に以下のように積を定める：

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb + \alpha(a, b)) \tag{1.2}$$

ここで $(a, x), (b, y) \in A \oplus D(A)$. このとき, $A \oplus D(A)$ は K-多元環であり, これを $T_\alpha(A)$ とかく. 結合法則は, (1.1) によって成立する. そして, この $T_\alpha(A)$ により Hochschild 拡大

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow T_\alpha(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

が得られる．逆に, Hochschild 拡大 $0 \to D(A) \to T \to A \to 0$ に対して, ある 2-cocycle α が存在し, T が $T_\alpha(A)$ と同型になる．$A^e = A \otimes A^{op}$ とする．2-cocycle は Hochschild cohomology $H^2(A, D(A)) := \mathrm{Ext}_{A^e}(A, D(A))$ の元の代表元になっており, 次の結果が知られている．

Proposition 1.1 ([2, Proposition 6.2], [5, Section 2.5])**.** *$F(A, D(A))$ と $H^2(A, D(A))$ は一対一対応しており, これは 2-cocycle α を Hochschild 拡大 $T_\alpha(A)$ に対応することで得られる．特に $H^2(A, D(A))$ の零元は splittable 拡大に対応する．*

特に $T_0(A)$ を trivial 拡大環といい, 多元環の表現論において非常に有用である．

2 quiver 表示

qiver Q とは, 2 つの集合 Q_0, Q_1 および, 2 つの写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ の四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことをいう．このとき, Q_0 の元を頂点, Q_1 の元を矢といい, 矢 $x \in Q_1$ に対して $s(x)$ をその始点, $t(x)$ をその終点という．矢の列 $x_1x_2\cdots x_n$ で $t(x_i) = s(x_{i+1})$ をみたすものを長さ n の道という．また, Q の頂点を長さ 0 の道とみなし, $u \in Q_0$ 対して e_u と表す．quiver は次のようにグラフで表すことができる．

Example 1. $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_0 = \{x, y\}$, $s(x) = 1$, $s(y) = 2$, $t(x) = 2$, $t(y) = 3$ のとき, $1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3$

quiver Q に対して, Q の道全体を基底とする線形空間 KQ を考える． 2 つの道 $x_1x_2\cdots x_m$, $y_1y_2\cdots y_l$ に対して, その積 $(x_1x_2\cdots x_m)(y_1y_2\cdots y_l)$ を, $t(x_m) = s(y_1)$ ならば道 $x_1x_2\cdots x_my_1y_2\cdots y_l$, $t(x_m) \neq s(y_1)$ ならば 0 として, 多元環 KQ を考える．このとき KQ を道多元環という．

Theorem 2.1. *A が有限次元 basic K-多元環なら, ある quiver Q と KQ の ideal I が存在して A と KQ/I は同型になる．また, この Q は A によって一意に定まり, これを A の ordinary quiver といって Q_A とかく．*

これより, quivar を求めることで多元環の積構造を視覚的に捉えることができる．trivial 拡大環についてはその ordinary quiver が既に決定している．

Theorem 2.2 ([1])**.** *trivial 拡大環 $T_0(A)$ に大して, その ordinary quiver $Q_{T_0(A)}$ は以下によって定まる：*

- $(Q_{T_0(A)})_0 = (Q_A)_0$
- $(Q_{T_0(A)})_1 = (Q_A)_1 \cup \{y_{p_1}, y_{p_2}, \dots y_{p_l}\}$

ここで, y_{p_i} は $\mathrm{soc}_{A^e}(A)$ の基底 $\{p_1, p_2, \dots p_l\}$ に対応する矢 $y_{p_i} : t(p_i) \to s(p_i)$ である．

さらに, 一般の Hochschild 拡大環についての ordinary quiver については以下のことがわかる．

Lemma 2.3. *A を有限次元 basic K-多元環, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を 2-cocycle とする．α が任意の $i \in \Delta_0$ に対して $\alpha(e_i, -) = \alpha(-, e_i) = 0$ をみたすとき, 次の subquiver の列を得る：*

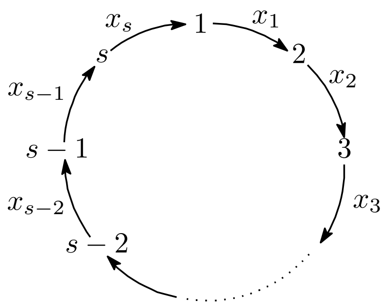
$$\Delta \subseteq \Delta_{T_\alpha(A)} \subseteq \Delta_{T_0(A)}.$$

Lemma 2.4. *A を有限次元 basic K-多元環, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を 2-cocycle とする．α が任意の $i \in \Delta_0$ に対して $\alpha(e_i, -) = \alpha(-, e_i) = 0$ をみたすとき, 次は同値である：*

(1) $\alpha(\mathrm{rad}\, A, \mathrm{rad}\, A) \subseteq \mathrm{rad}\, AD(A) + D(A)\mathrm{rad}\, A$.
(2) $\Delta_{T_\alpha(A)} = \Delta_{T_0(A)}$.

3　主定理

本研究では以下によって定まる自己入射中山多元環の Hochschild 拡大環について考察する．Δ を次のような $s\,(\geq 1)$ 個の頂点と s 本の矢からなる cyclic quiver とする：



n を 2 以上の整数, R_Δ^n を長さ n 以上の道で生成される $K\Delta$ の ideal としたとき, $A = K\Delta/R_\Delta^n$ を自己入射中山多元環という． 以降, e_i, x_i の添え字 i は s を法として考える． 一般に, Hochschild cohomology $H^2(A,\, D(A))$ は Hochschild homology $HH_2(A) := \mathrm{Tor}_2^{A^e}(A,\, A)$ の双対空間 $D(HH_2(A))$ と同型であることが知られている．この Hochschild homology については以下の定理がある.

Theorem 3.1. 自己入射中山多元環 A に対して,2 次 *Hochschild homology* 群は $HH_2(A) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} HH_{2,\,q}(A)$ と直和分解でき, 各直和因子は以下のようになる：

$$HH_{2,\,q}(A) = \begin{cases} K & \text{if } s|q \text{ and } n+1 \leq q \leq 2n-1, \\ K^{s-1} \oplus \mathrm{Ker}(\cdot \frac{n}{s} : K \to K) & \text{if } s|q \text{ and } q = n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

[3] により, 2 次 Hochschild homology 群と 2 次 Hochschild cohomology 群に関する同型写像

$$\Theta : \bigoplus_q D(HH_{2,\,q}(A)) \cong D(\bigoplus_q HH_{2,\,q}(A)) = D(HH_2(A)) \xrightarrow{\sim} H^2(A,\, D(A)).$$

が与えられており, この Θ を通して 2-cocycle を構成できる．ここから以下の主結果を得られる.

Theorem 3.2 ([3])**.** $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし $n \leq q \leq 2n-1$ とする．$\alpha : A \times A \to D(A)$ をその *cohomology class* $[\alpha]$ が $\Theta(D(HH_{2,\,q}(A)))$ に含まれ, $[\alpha] \neq 0$ をみたす *2-cocycle* とする．このとき*, Hochschild* 拡大環 $T_\alpha(A)$ の *ordinary quiver* $\Delta_{T_\alpha(A)}$ は次で与えられる：

$$\Delta_{T_\alpha(A)} = \begin{cases} \Delta_{T_0(A)} & \text{if} \quad n \leq q \leq 2n-2, \\ \Delta & \text{if} \quad q = 2n-1. \end{cases}$$

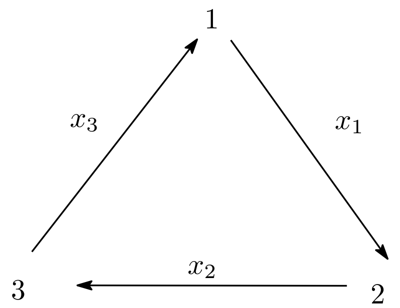
Corollary 3.3. $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし $n \leq q \leq 2n-1$ とする．$\alpha : A \times A \to D(A)$ を任意の *2-cocycle* とすると $[\alpha] = \sum_{q=n}^{2n-1} [\beta_q]$ とかける．ここで $\beta_q : A \times A \to D(A)$ は *cohomology class* $[\beta_q]$ が $\Theta(D(HH_{2,\,q}(A)))$ に含まれるような *2-cocycle* である．このとき次が成立する：

$$\Delta_{T_\alpha(A)} = \begin{cases} \Delta_{T_0(A)} & \text{if } [\beta_{2n-1}] = 0, \\ \Delta & \text{if } [\beta_{2n-1}] \neq 0. \end{cases}$$

Corollary 3.4. $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を任意の *2-cocycle* とする．もし $\Delta_{T_\alpha(A)} = \Delta$ ならば $T_\alpha(A)$ は $K\Delta/R_\Delta^{2n}$ と同型であり, $T_\alpha(A)$ は対称多元環である.

4　具体例

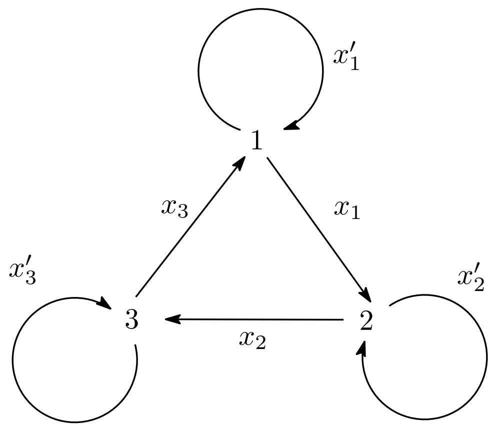
$s = 3$ つまり, Q を次の quiver とする:



$A = KQ/R_Q^n$ として Theorem 3.1 から, $n = 4$ とすると $HH_{2,q}(A) \neq 0$ となるのは $q = 6$ のときに他ならない. このとき Θ を通して構成される 2-cocycle $\alpha : A \times A \to D(A)$ は長さ 1 以上の道 a, b に対しては

$$\alpha(a, b) = \begin{cases} (x_{i+4}x_{i+5})^* & \text{if } ab = x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}, \\ x_{i+5}^* & \text{if } ab = x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} x_{i+4}, \\ e_{i+6}^* & \text{if } ab = x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} x_{i+4} x_{i+5}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

長さ 0 の道に対しては常に 0 と定義される. Theorem 2.2 より, $Q_{T_0(A)}$ は次の quiver となる:



このとき, $T_\alpha(A)$ は $KQ_{T_0(A)}/I$ と同型である. ここで,

$$I = \langle x_i' x_i - x_i x_{i+1}',\, x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} - x_i' x_i,\, (x_i')^2 \mid i = 1, 2, 3 \rangle$$

である. 一方, $T_0(A)$ は $KQ_{T_0(A)}/I_0$ と同型である. ここで

$$I_0 = \langle x_i' x_i - x_i x_{i+1}',\, x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3},\, (x_i')^2 \mid i = 1, 2, 3 \rangle$$

となる.

References

[1] Fernández, E. and Platzeck, M. (2002). Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner. *J. Algebra* **249**, 326–344.

[2] Hochschild, G. (1945). On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. Math.* (2) 46:58–67.

[3] Koie, H., Itagaki, T., Sanada, K. The ordinary quivers of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras. *submitted*, arXiv:1707.01618

[4] Sköldberg, E. (1999). The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebra. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 59:76–86.

[5] Yamagata, K. (1996). Frobenius Algebras. *Handbook of Algebra* 1:841–887. Elsevier.