組み紐のゼータ函数と q-series

岡本　健太郎 *
Kentaro Okamoto

九州大学大学院数理学府博士後期課程 3 年
日本学術振興会特別研究員 (DC2)

1　導入

有限集合上の力学系から定義されるゼータ函数は, 函数等式やオイラー積表示を満たすなどの性質を持ち, 数論で現れるデデキントゼータ函数の類似, あるいはトイ・モデルとして, Kim, 小山, 黒川らによって研究された ([6], [8]). 本研究では, このような力学系のゼータ函数の一般化として, 組み紐群の Burau 表現を用いてゼータ函数を定め, その性質を調べた. 結果的に力学系のゼータ函数には見られなかった性質として, 留数に幾何学的な不変量 (結び目の Alexander 多項式) が現れることがわかった ([14]). また, 他の組み紐群の表現の間の関係をゼータ函数の視点から観察することで, 不変量間の関係や, その力学的, あるいは数論的性質を理解することが期待される.

本稿では, A. Kosyak によって構成された 3 次組み紐群 B_3 の表現を, B_n へと一般化し, 得られた表現 $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ のゼータ関数について考察する. 特に, トーラス型といわれる組み紐に関するゼータ関数の明示公式を与え, その系として q-恒等式や, q-series との関係を得たので紹介する.

2　準備

2.1　有限力学系のゼータ函数

有限集合 $X_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ と, その自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(X_n)$ の組から定まる力学系（σ, X_n）のゼータ函数を以下で定義する.

$$\zeta_\sigma(s, X_n) := \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^m, X_n)|}{m} s^m\right\}$$

ここで、$\mathrm{Fix}(\sigma^m, X_n) := \#\{x \in X_n \mid \sigma^m x = x\}$. つまり, σ^m による X_n 上の不動点の個数を表す. こうして定まる力学系ゼータ函数 $\zeta_\sigma(s, X_n)$ は, オイラー積表示や関数等式, リーマン予想の類似を満たすなどの性質を持っている. なお, 自然数 $N \geq 2$ に対して、

$$N^{X_n} := \{\{1_{(i_1)}, 2_{(i_2)}, \ldots, n_{(i_n)}\} \mid 0 \leq i_j \leq N-1\}$$

とおくと, $\sigma \in \mathrm{Aut}(X_n)$ は自然に N^{X_n} に作用し,

$$\zeta_\sigma(s, N^{X_n}) := \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^m, N^{X_n})|}{m} s^m\right\}$$

という力学系 (σ, N^{X_n}) のゼータ関数を考えることもできる.

---

*Kyushu University, e-mail:k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

2.2 組み紐群

組み紐群について簡潔にまとめる．（詳しくは [2], [3], [4], [7] を参照）．n 次組み紐群 B_n とは, 以下で定義される.

$$B_n := \langle \sigma_i (1 \leq i \leq n-1) \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i-j| > 1), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle$$

組み紐群の生成元 σ_i は図のように視覚的に捉えることができる.

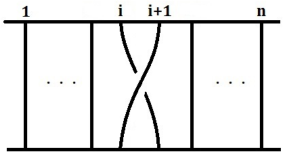

Figure 1: 生成元 σ_i

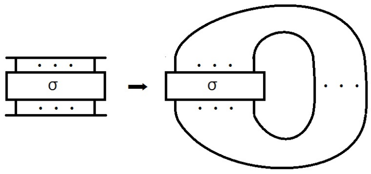

Figure 2: 閉包 σ

生成元 σ_i は i 番目と $i+1$ 番目の紐が Figure 1 のように交差している n 本の紐と思え, 紐を下につなげることで積を考えることができる．次に いくつかの基本的な記号を導入する.
(1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ への自然な全射準同型 $\pi_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow B_n$ を以下で定める.

$$\pi_n(\sigma_i) = (i, i+1).$$

(2) 絡み目全体の集合 $\{Link\}$ への写像を Figure 2 のように定める．$\sigma \in B_n$ の像を $\widehat{\sigma}$ と表し, これを σ の閉包と呼ぶ.
(3) 自然数のペア (n, m) に対して $\sigma_{n,m} := (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^m$ と定める．これをトーラス型組み紐と呼ぶ．(n, m) が互いに素なとき, $\sigma_{n,m}$ の閉包は結び目になり, 一般的にトーラス結び目と呼ばれる.

Figure 3: トーラス型組み紐 $\sigma_{5,3}$

(4) 組み紐群の元 σ が $\sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$ と表されるとき, $\varepsilon : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $\varepsilon(\sigma) := e_1 + \cdots + e_r$ で定める.
(5) 組み紐群の表現 $\beta_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W_n)$ を以下で定める.

$$\beta_{n,q}(\sigma_i) := I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

ここで, W_n は n 次元の複素ベクトル空間とし, q は複素パラメータとする．この表現 $\beta_{n,q}$ を Burau 表現と呼ぶ.

注 2.2.1. $\pi_n(\sigma) \in \mathfrak{S}_n$ が長さ n のサイクルであるとき, $\widehat{\sigma}$ の成分数は 1 となり, 結び目となる.

Burau 表現は, 次のように自明表現と非自明な既約表現に分解される.

$$\beta_{n,q} = \mathbf{1} \oplus \beta_{n,q}^r.$$

ここで $\beta^r_{n,q}: B_n \longrightarrow GL(W^r_n)$ は $n-1$ 次元の表現であり, 被約 Burau 表現と呼ばれる. $\beta^r_{n,q}$ の具体的な定義は以下で与えられる.

$$\beta^r_{n,q}(\sigma_i) := \begin{cases} \begin{pmatrix} -q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3} & (i=1), \\ I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & -q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2} & (i=2,\ldots,n-2), \\ I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -q \end{pmatrix} & (i=n-1). \end{cases}$$

2.3 表現のゼータ函数とその具体例

有限集合上の力学系ゼータ函数の一般化として,「表現のゼータ函数」というものが考える. (G,ρ,V) を $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現とするとき, $g \in G$ に関する表現 ρ のゼータ函数を

$$\zeta(s,g;\rho) := \det(I-\rho(g)s)^{-1}.$$

で定める. 次に表現のゼータ函数についていくつか具体例を挙げてみよう.

例 2.3.1. (置換表現 $p_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ の場合)
この場合, $\mathfrak{S}_n \simeq \mathrm{Aut}(X_n)$ であることから, 有限集合 X_n 上の力学系ゼータ函数に一致する. つまり, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\zeta(s,\sigma;p_n) = \zeta_\sigma(s,X_n)$$

が成り立つ.

例 2.3.2. (Burau 表現 $\beta_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W_n)$ の場合)
$\sigma \in \mathrm{B}_n$ に対して定まるゼータ函数 $\zeta(s,\sigma:\beta_{n,q})$ は函数等式や（複素パラメータ q にある条件を課すことで）リーマン予想の類似が成り立つ. さらに, $\widehat{\sigma}$ が結び目であるとき, ゼータ函数の「留数公式」は以下のようになる.

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q}\Delta_{\widehat{\sigma}}(q)^{-1}.$$

ここで, $\Delta_{\widehat{\sigma}}(q)$ は結び目 $\widehat{\sigma}$ の Alexanber 多項式であり, 結び目の古典的な不変量である. また $[n]_q$ は q-整数であり,

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$$

で定義される.

例 2.3.3. (HOMFLY 表現 $\tau^{(N)}_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(V_N^{\otimes n})$ の場合)
V_N を N 次元複素ベクトル空間（$N \geq 2$）とし, その基底を $\{e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$ とする. このとき線形作用素 $R^{(N)}_q : V_N^{\otimes 2} \longrightarrow V_N^{\otimes 2}$ を次で定める.

$$R^{(N)}_q(e_i \otimes e_j) := \begin{cases} qe_j \otimes e_i & (i<j), \\ e_i \otimes e_i & (i=j), \\ e_j \otimes e_i + (1-q)e_i \otimes e_j & (i>j). \end{cases}$$

$R_q^{(N)}$ は Yang-Baxter 方程式を満たす．つまり

$$(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N})(id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N}) = (id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N})(id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})$$

が成り立つ．したがって，$\tau_{n,q}^{(N)}(\sigma_i) := id_{V_N}^{\otimes(i-1)} \otimes R_q^{(N)} \otimes id_{V_N}^{\otimes(n-i-1)}$ と定めることで組み紐群の表現を得る．これを HOMFLY 表現という．この表現に関してゼータ函数 $\zeta(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)})$ が定義でき，またその変形版を次で定める．

$$\zeta_t(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)}) := \det(I_{N^n} - \tau_{n,q}^{(N)}(\sigma)\mu_N(t)s)^{-1}$$

ここで $\mu_N(t) := \mathrm{diag}(1,t,\dots,t^{N-1})$ と定める．$\widehat{\sigma}$ が結び目であるとき，対数微分の $s=0$ での値は，

$$\frac{d}{ds}\log\zeta_q(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)})\bigg|_{s=0} = \mathrm{tr}(\tau_{n,q}^{(N)}(\sigma)\cdot\mu_N(q)^{\otimes n}) = q^{\frac{1}{2}(N-1)(n-\varepsilon(\sigma)-1)}[N]_q H_{\widehat{\sigma}}^{(N)}(q).$$

となる．ここで $H_{\widehat{\sigma}}^{(N)}(q))$ は，結び目 $\widehat{\sigma}$ の N 階 HOMFLY 多項式という．なお，$N=2$ のときは Jones 多項式と呼ばれる．特に $n=3$ の場合，$\tau_{3,q}^{(N)}$ に関するゼータ函数は

$$\zeta(s,\sigma;\tau_{3,q}^{(N)}) = \frac{\zeta(s,\sigma;\beta_{3,q})^{(N-1)N(N+1)/3}}{(1-s)^N}.$$

となり，Burau 表現のゼータ函数のみで表すことができる．これは HOMFLY 表現が岩堀-Hecke 代数の構造を持つことから従う．

さらに，HOMFLY 表現 $\tau_{n,q}^{(N)}$ におけるゼータ函数の古典極限 $q\to 1$ は

$$\lim_{q\to 1}\zeta(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)}) = \zeta_{\pi_n(\sigma)}(s,N^{X_n})$$

となり，力学系 $(\pi_n(\sigma),N^{X_n})$ のゼータ函数となる．

3　B_3 の表現 $\rho_{3,q,t}^{(N)}$ の構成

3.1　表現の構成

表現の構成方法について説明しよう．まずは B_3 の被約 Burau 表現 $\beta_{3,q}^r$ を，パラメータ q を $-t$ とおき，次のように書き直す．

$$\beta_{3,q}^r(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta_{3,q}^r(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

続いて，$\beta_{3,-t}^r$ の N 階対称テンソル積表現 $S^{(N)}(\beta_{3,-t})$ を考える．具体的に表すと

$$\mathrm{Sym}^{(N)}(\beta_{3,q}^r)(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \binom{N}{N} & \binom{N}{N-1} & \cdots & \binom{N}{0} \\ & \binom{N-1}{N-1} & \cdots & \binom{N-1}{0} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{0}{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^N & & & \\ & t^{N-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Sym}^{(N)}(\beta_{3,q}^r)(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t^{N-1} & \\ & & & t^N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & \\ \vdots & \ddots & \\ (-1)^{N-1}\binom{N-1}{N-1} & \dots & (-1)^0\binom{N-1}{0} & \\ (-1)^N\binom{N}{N} & \dots & (-1)^1\binom{N}{1} & (-1)^0\binom{N}{0} \end{pmatrix}.$$

ここで, 各成分に現れる二項係数に対して

$$\binom{n}{m} \mapsto q^{t(m)} \binom{n}{m}_q$$

という q-変形を施す. $t(m) := \frac{m(m-1)}{2}$ で, $\binom{n}{m}_q$ は q-二項係数といわれ, 以下で定める.

$$\binom{n}{m}_q := \begin{cases} \frac{[n]_q!}{[m]_q![n-m]_q!}, & (0 \leq m \leq n) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad [n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q & (n > 0), \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

こうして構成された B_3 の表現（写像）を $\rho^{(N)}_{3,q,t} : B_3 \longrightarrow GL(\mathrm{Sym}^{(N)}(W^r_3))$ と表すことにする.

定義 3.1.1. B_3 の生成元 σ_1, σ_2 に対して, 表現 $\rho^{(N)}_{3,q,t}$ を以下で定める.

$$\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_1)_{i,j} := q^{t(N-j)} \binom{N-i}{N-j}_q t^{N-j}, \quad \rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_2)_{i,j} := (-1)^{i-j} q^{t(j)} \binom{i}{j}_q t^i$$

ここで $0 \leq i, j \leq N$ である.

また, 以下の等式が成り立つ.

$$\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_1)\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_2)\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_1) = \rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_2)\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_1)\rho^{(N)}_{3,q,t}(\sigma_2).$$

こうして, 次が成り立つ.

命題 3.1.1. $\rho^{(N)}_{3,q,t}$ は B_3 の表現である.

この命題を含め, 今後ほぼ全ての計算で用いる補題をここで紹介する.

補題 3.1.1. $n > 1$ に対し, 次が成り立つ。

$$(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z) = \sum_{k=0}^{n} q^{t(k)} \binom{n}{k}_q z^k,$$

$$\frac{1}{(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{n+l-1}{l}_q z^l.$$

4 一般化

4.1 $\rho^{(N)}_{n,q,t}$ の構成

この章では, 4 章で定めた表現 $\rho^{(N)}_{3,q,t}$ を, B_n に対して一般化する. $n = 3$ の場合と $n \geq 4$ の場合は構成方法に注意する必要がある. 例えば $n = 4$ の場合, σ_1, σ_3 に対しては先ほどと同様に構成ができるが, σ_2 に対しては

$$\beta^r_{4,q}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

のように, 上三角行列, 対角行列, 下三角行列と, 3 つに分解される. 対称テンソル積表現を考えたときには両端の行列の成分に二項係数が現れるが, どちらにも

$$\binom{n}{m} \mapsto q^{t(m)} \binom{n}{m}_q$$

という変形を行うと, 組み紐群の表現にならない. 組み紐群の関係式を満たすためには, 最初の行列に関しては $q^{t(m)}$ を付けず, 最後の行列に関しては上の変形を施せばよい. これが表現になっていることは後で述べることにする. まずは表現を定式化するために, いくつか記号を導入する.

被約 Burau 表現 $\beta_{n,q}^r : B_n \longrightarrow GL(W_n^r)$ において, W_n^r の基底を $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$ とする. $X_{n-1} := \{1, 2, \ldots, n-1\}$ とし, 集合 $\mathbb{I}_n^r(N)$ を次で定める.

$$\mathbb{I}_n^r(N) := \{(i_1, i_2, \ldots, i_N) \in X_{n-1}^N \mid i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_N\}.$$

また, $I = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in \mathbb{I}_n^r(N)$ に対して,

$$f_I = f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_N}$$

と書くことにする. こうすることで, ベクトル空間 $\mathrm{Sym}^N(W_n^r)$ の基底は $\{f_I \mid I \in \mathbb{I}_n^r(N)\}$ と表すことができる. $\mathrm{Sym}^N(W_n^r)$ 上の線形作用素 A により, $f_I \mapsto \sum_J A_{I,J} f_J$ となるとき $A_{I,J}$ を作用素 A の (I,J)-成分と呼ぶ. さらに, I の中に含まれる $l \in X_{n-1}$ の個数を $N_l(I)$ と表すことにする. こうして $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ は計算することで以下のように統一的に定義できる.

定義 4.1.1. $1 \leq i \leq n-1$ に対して表現 $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ は次のように定義できる.

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i)_{I,J} := (-1)^{N_{i-1}(I) - N_{i-1}(J)} q^{t(N_i(J))} \binom{N_i(I)}{N_i(J)}_q \binom{N_i(I) - N_i(J)}{N_{i+1}(J) - N_{i+1}(I)}_q t^{N_i(I) + N_{i+1}(I) - N_{i+1}(J)} \chi_i(I, J).$$

ここで,

$$\chi_i(I, J) := \begin{cases} 1 & N_k(I) = N_k(J), (k \neq i-1, i, i+1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし, $i \notin X_{n-1}$ であるとき, $N_i(I) = 0$ とする.

命題 4.1.1. $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ は組み紐群 B_n の表現である.

証明方法は, 組み紐の関係式

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i)\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_j) = \rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_j)\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i) \quad (|i-j| > 1),$$
$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i)\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{i+1})\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i) = \rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{i+1})\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_i)\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

を満たすことを示せばよい. 可換性は比較的容易だが, 2 番目の関係式は計算が煩雑なので, 割愛させていただく.

4.2 ゼータ函数の明示公式とその応用

この表現に付随するトーラス型の組み紐のゼータ関数は以下で与えられる.

定理 4.2.1. 互いに素な自然数のペア (n, m) に対して, 以下が成り立つ.

$$\zeta(s, \sigma_{n,m}; \rho_{n,q,t}^{(N)}) = \zeta((-t)^{mN} q^{\frac{2mt(N)}{n}} s, c_n; \mathrm{Sym}^{(N)} p_n^r)$$

ここで, $c_n \in \mathfrak{S}_n$ は長さ n のサイクルで, p_n^r は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $(n-1)$ 次元既約表現である.

この定理の証明のためにいくつかの補題を紹介する.

補題 4.2.1. $K \in \mathbb{I}_n^r$ に対して, $S_i(K) := N_1(K) + N_2(K) + \cdots + N_i(K)$ とおく. このとき

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,1})_{I,J} = t^N q^{t(N)} \prod_{k=1}^{n-2} (-1)^{N_k(J)} q^{-N_k(J)} \binom{N_{k+1}(I)}{N_k(J)}_{q^{-1}} q^{-(N-S_{k+1}(I))N_k(J)}.$$

となる.

定義 4.2.1. 1 から $n-1$ までの数と黒丸を m だけずらした次のような配列を考える.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & n-1 & \bullet \\ n-m+1 & n-m+2 & \cdots & n-1 & \bullet & 1 & \cdots & n-m-1 & n-m \end{bmatrix}.$$

これを m-シフト配列と呼ぶ. この配列の上段は I に, 下段は J に対応している. また, 黒丸を除く上下のペア $(1, n-m+1), \cdots (m-1, n-1), (m+1, 1) \cdots, (n-1, n-m-1)$ の集合を $\mathcal{P}(n,m)$ と記す. これを用いて次を定める.

$$\mathcal{S}_{n,m}(q;(I,J)) := \prod_{(i,j)\in\mathcal{P}(n,m)} q^{t(N_j(J))} \binom{N_i(I)}{N_j(J)}_q.$$

さらに, I, J に対して定まる次のような数列を考える.

$$\begin{aligned} a(I,J) &:= \sum_{i>j} N_i(I) N_j(J), \\ a_{n,m}(I,J) &:= \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}(n,m)} N_i(I)N_j(J) - N_{n-m+1}(J), \ \ (1 \le m \le n-1), \\ b_{n,m}(I,J) &:= \sum_{l=1}^{m} a_{n,l}(I,J). \end{aligned}$$

これらの記号を用いて, $\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,m})$ は次のように表すことができる.

補題 4.2.2. $1 \le m \le n-1$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,m})_{I,J} = (-t)^{mN}(-1)^{N_{n-m}(J)} q^{t(N)} \mathcal{S}_{n,m}(q^{-1};(I,J)) q^{b_{n,m}(I,J)-a(I,J)}.$$

右辺を $P_{I,J}^{(m)}$ とおく. $m=1$ のときは明らかに

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,1})_{I,J} = P_{I,J}^{(1)}$$

なので, $1 \le m \le n-2$ に対し

$$\sum_K P_{I,K}^{(m)} P_{K,J}^{(1)} = P_{I,J}^{(m+1)}$$

が成り立つことを示せば十分であるが, 計算が非常に複雑なのでここでは省略する.

この補題から, $\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,n})$ は

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,n})_{I,J} = (-t)^{nN} q^{2t(N)} \delta_{I,J}$$

と計算でき, 定理 4.2.1 が証明される.

定理の系として, 次の恒等式を得ることができる.

系 **4.2.1.** $n \geq 3$ と, 2 以上の自然数 N に対して, 以下が成り立つ.

$$\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}=N} (-1)^{\lambda_{n-1}} q^{t(\lambda_{n-1})+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_{n-2}^2} \binom{\lambda_2}{\lambda_1}_q \binom{\lambda_3}{\lambda_2}_q \cdots \binom{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}_q = \begin{cases} q^{k(nk-1)} & (N=nk) \\ -q^{k(nk+1)} & (N=nk+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

さらに, 次のようなトレース母関数を考える.

$$Z_{q,t}(s,\sigma) := 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \operatorname{tr} \rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma) s^N$$

この函数は $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ の構成方法と MacMahon Master 定理からただちに次が成り立つ.

$$\lim_{q\to 1} Z_{q,t}(s,\sigma) = \zeta(s,\sigma;\beta_{n,-t}^r).$$

つまり, $Z_{q,t}(s,\sigma)$ は $\zeta(s,\sigma;\beta_{n,-t}^r)$ の q-変形になっている. さらにトーラス型の場合, 次が得られる.

系 **4.2.2.** $\sigma_{n,1}$ の場合,　以下がな成り立つ.

$$\lim_{t\to 1} Z_{q,t}(1,\sigma_{n,1}) = 1 + \prod_{k\equiv 0,\pm(n-1)\ (\mathrm{mod}\ 2n)} (1-(-q)^k).$$

が成り立つ.

References

[1] S. Albeverio, A. Kosyak, q-Pascal's triangle and irreducible representations of the braid group B_3 in arbitrary dimension, arXiv:math.QA(RT)/0803.2778v2.

[2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1928) 275–306.

[3] E. Artin. Theory of braids, Ann. of Math. (2) 48 (1947) 101–126.

[4] J. S. Birman. Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies 82. Princeton University. Press, 1974.

[5] J. S. Birman, On the Jones polynomial of closed 3-braids. Inventiones mathematicae 81 (1985) 287–294.

[6] A. Deitmar and S. Koyama and N. Kurokawa. Absolute zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 84 (2008) no. 8, 138–142.

[7] C. Kassel and V. Turaev. Braid Groups. Springer, 2008.

[8] S. Kim and S. Koyama and N. Kurokawa. The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over $\mathbf{F}_1$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85, (2009) no. 6, 75–80.

[9] A Kosyak. The Lawrence-Krammer representation is a quantization of the symmetric square of the Burau representation, arXiv:math. QA(RT)/1609.06663.

[10] S. Koyama and S. Nakajima. Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 88, (2012) no. 8, 115–120.

[11] B. I. Kurpita and K. Murasugi. A study of braids . Mathematics and its Applications, 484. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[12] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis vol.1, Cambridge University Press, 1917. Reprinted by Chelsea, 1984.

[13] T. Ohtsuki. Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.

[14] K. Okamoto. Braid zeta function and some formulae for the torus type, arXiv:math. QA(RT)/1611.08370.

[15] L. Rozansky. The universal R-matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial, Adv. Math. 134 (1998) 1–31.