

# ASAI 表現に付随する EPSILON 因子の比較について

石川 勲 (ISAO ISHIKAWA)  
理化学研究所革新知能統合センター/慶應義塾大学

ABSTRACT. 本稿では主に  $GL_2$  上の generic な既約許容表現に対して定まる *Asai* 表現が主題である。Asai 表現に対して  $L$  関数, 及び, epsilon 因子と呼ばれる不変量が定義できるが, この不変量には 3 つの異なる定義が存在する。それらの定義は全く異なる文脈でなされるため, それらの比較は重要な問題である。今回, 筆者は定義の異なる epsilon 因子ら同士の明示的な関係式を与えたので, その結果について概説したい。

## 1. ASAI 表現に付随する $L$ 関数, 及び, EPSILON 因子の定義

ここでは Asai 表現に付随する  $L$  関数, 及び, epsilon 因子について復習する。まず, Rankin-Selberg 積分を用いた定義を詳しく述べた後に, 他の定義を簡単に紹介し, それらの定義間に関係性について述べる。1 つ注意として, Asai 表現は Langlands 対応によって Galois 側で明示的に定義されるため, 保型表現を主に扱う本稿では Asai 表現と呼ばれる表現は現れず, その  $L$  関数と epsilon 因子のみが定義される形となる。以下においては  $p$  を素数として,  $F$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大とする。

1.1. Rankin-Selberg 積分を用いた定義について。  $E$  を  $F$  上の 2 次半単純代数とする, すなわち,  $E$  は  $F$  の 2 次拡大体か  $F \times F$  である。  $E = F \times F$  である時,  $F$  を対角埋め込みによって  $E$  の部分体とみなす。  $\varpi_F \in F$  を  $F$  の素元として 1 つ固定する。  $E$  が体の時は,  $\varpi_E \in E$  を  $E$  の素元として 1 つ固定する。  $|\cdot|_F$  を  $F$  の  $p$  進絶対値とし,  $|\varpi_F|_F = q^{-1}$  と正規化する。ここで  $q$  は  $F$  の剰余体の位数である。  $|\cdot|_E$  を  $|N_{E/F}(\cdot)|_F$  によって定義する。  $N_{E/F}$  は  $E^\times$  から  $F^\times$  へのノルム写像である。以下では,  $\xi \in E^\times$  を  $\text{tr}_{E/F}(\xi) = 0$  なるものとして 1 つ固定する。

$\pi$  を  $GL_2(E)$  の無限次元既約許容表現として中心指標を  $\omega$  とする。ここで, 表現  $\pi$  が許容表現であるとは, 任意の開コンパクト部分群  $K \subset GL_2(E)$  に対して,  $\pi$  の  $K$  不変部分空間  $\pi^K$  が有限次  $\mathbb{C}$  線形空間であり, さらに,

$$\pi = \bigcup_{K: \text{開コンパクト部分群}} \pi^K$$

が成立するものを指す。

$\psi : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を加法的な非自明連続準同型とする。さらに,

$$\psi_\xi : E \rightarrow \mathbb{C}^\times; \quad x \mapsto \psi(\text{tr}_{E/F}(\xi x))$$

と定義する。

$\mathcal{W}(\pi, \psi_\xi)$  を  $\pi$ , 及び,  $\psi_\xi$  に付随する Whittaker 模型とする。すなわち,  $\mathcal{W}(\pi, \psi_\xi)$  は  $GL_2(E)$  上の連続関数  $f$  であって次の性質を満たすもの全体の集合である: 任意の  $u \in E$  と  $g \in GL_2(E)$  に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \psi_\xi(u)f(g)$$

が成立し, さらに, ある開コンパクト部分群  $K \subset \mathrm{GL}_2(E)$  が存在して, 任意の  $k \in K$  と  $g \in \mathrm{GL}_2(E)$  に対して

$$f(gk) = f(g)$$

が成立する.

$\mathfrak{S}(F^2)$  を  $F^2$  上の Bruhat-Schwartz 関数 (局所定数かつ support コンパクトな関数) 全体とする. 任意の  $\Phi \in \mathfrak{S}(F^2)$  と  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\xi)$  に対して  $s \in \mathbb{C}$  の関数を次のように定義する (このような形の積分を総称して Rankin-Selberg 積分と呼ぶ):

$$(1.1) \quad Z(s, W, \Phi) := \int_{U(F) \backslash \mathrm{GL}_2(F)} W(g) \Phi((0, 1)g) |\det(g)|_F^s dg.$$

ここで  $U(F)$  は  $\mathrm{GL}_2(F)$  の冪単かつ上三角行列全体であり,  $dg$  は  $\mathrm{GL}_2(E)$  の不変測度で  $\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F), dg) = 1$  を満たすものとする.  $Z(s, W, \Phi)$  は  $\mathrm{Re}(s)$  が十分に大きい時にこの積分は絶対収束し複素平面全体に有理型関数として解析接続される. より詳しくは,  $Z(s, W, \Phi)$  は  $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$  の商体の元となる.  $Z(s, W, \Phi)$  らによって生成される  $\mathbb{C}$  線型空間は  $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$  の分数イデアルになっており, さらに 1 を含むことが確かめられる. 従って, ある多項式  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  かつ  $P(0) = 1$  なるものが存在して,  $P(q^{-s})^{-1}$  がその分数イデアルの生成元となる ([F193, Appendix, Theorem]).

まず, Asai 表現に付随する  $L$  関数 (Asai  $L$  関数)  $L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi)$  をこの生成元によって定義する:

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi) := \frac{1}{P(q^{-s})}.$$

より一般に任意の指標  $\chi: F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi) := L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}(\pi \otimes \tilde{\chi}))$$

と定義する. ここで,  $\tilde{\chi}: F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は

$$\tilde{\chi}|_{F^\times} = \chi.$$

を見たす  $E^\times$  の指標である. この定義は  $\tilde{\chi}$  の選択に依存しないことに注意する. この  $\mathbb{C}$  上の有理型関数は次の関数等式を満たす ([F193, Appendix, Theorem]): 任意の  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\xi)$  に対して

$$(1.2) \quad \frac{Z(1-s, W \otimes \chi^{-1} \omega^{-1}, \hat{\Phi})}{L_{\mathrm{RS}}(1-s, \mathrm{As}\pi^\vee \otimes \chi^{-1})} = \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) \frac{Z(s, W \otimes \chi, \Phi)}{L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi)}.$$

ここで,  $\pi^\vee$  は  $\pi$  の双対表現であり,  $\pi, \psi$ , 及び,  $\xi$  のみから定まる数  $c \in \mathbb{C}^\times$  と  $m \in \mathbb{Z}$  が存在して

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) = cq^{-ms},$$

が成り立つ. また

$$\hat{\Phi}(x, y) := \int_{F \times F} \Phi(u, v) \psi(uy - vx) du dv$$

と定義する. ここで,  $du dv$  は  $F \times F \rightarrow \mathbb{C}; (x, y) \mapsto \psi(x + y)$  に関する自己双対的な不変測度である. すなわち

$$\hat{\hat{\Phi}}(x, y) = \Phi(x, y)$$

が成立する.

**注意 1.1.**  $E = F \times F$  の時,  $\xi = (\xi_0, -\xi_0)$  として  $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$  とする. ここで,  $\pi_i \text{GL}_2(F)$  の中心指標が  $\omega_i$  となる generic な既約表現である. この時, この Asai  $L$  関数は Jacquet により定義された [Jac72, Theorem 14.8, (1)] における古典的な Rankin-Selberg 局所  $L$  関数と一致する. epsilon 因子については  $\varepsilon_{\text{RS}}$  と [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものは

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{RS}}(s, \text{As}\pi, \psi, \xi) &= \omega_2(-1)\omega(\xi_0)|\xi_0|_F^{2s-1}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi) \\ &= \omega(\xi)|\xi|_E^{s-1/2}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi)\end{aligned}$$

なる関係にある. ここで右辺の  $\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi)$  が [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものである.

1.2. **Asai 表現の  $L$  関数, 及び, epsilon 因子の別の定義について.** 最初に述べたように, Asai  $L$  関数には Rankin-Selberg 積分を用いた定義以外にも 2 つ異なる定義が存在する. まず 1 つは Langlands-Shahidi 法 ([Sha90]) と呼ばれる簡約代数群上定義される 繋絡作用素を用いた定義があり,  $E$  が体の時は,  $\text{U}(2, 2)$  に対して,  $E$  が  $F^2$  の時は,  $\text{GL}_4$  に対して Langlands-Shahidi 法を適用することにより,  $L$  関数と epsilon 因子が得られる. これによって定義されたものを

$$\begin{aligned}L_{\text{LS}}(s, \text{As}\pi), \\ \varepsilon_{\text{LS}}(s, \text{As}\pi, \psi).\end{aligned}$$

と書く. もう 1 つは,  $\rho$  を Langlands 対応によって定まる  $\pi$  に対応した  $E$  の Weil-Deligne 群の表現とした時,  $\rho$  の乗法的誘導表現 ([Pra92, Section 7]) から定義される  $L$  関数, 及び, epsilon 因子である. これらを

$$\begin{aligned}L_{\text{Gal}}(s, \text{As}\pi), \\ \varepsilon_{\text{Gal}}(s, \text{As}\pi, \psi).\end{aligned}$$

と書く.

異なる定義間の関係性について述べる. まず,  $L$  関数については,  $E$  が体の時,  $L_{\text{RS}}$ ,  $L_{\text{LS}}$ , そして,  $L_{\text{Gal}}$  は全て一致することが, [Hen10, Section 1.5, Théorème], [Mat09, Theorem 1.3], 及び, [AR05, Theorem 1.6] の一連の結果によって証明されている.  $E = F^2$  の時はそれらが一致することは古典的な結果である. 従って, これらを

$$L(s, \text{As}\pi) := L_{\text{RS}}(s, \text{As}\pi) = L_{\text{LS}}(s, \text{As}\pi) = L_{\text{Gal}}(s, \text{As}\pi).$$

と書くことにする.

epsilon 因子については,  $E$  が体の時は, Krishmarthy ([Kri03]) によって, Langlands-Shahidi 法を用いたものと, Weil-Deligne 群の表現から定まるものが一致することが示されている. 従って, 以下では

$$\varepsilon(s, \text{As}\pi, \psi) := \varepsilon_{\text{LS}}(s, \text{As}\pi, \psi) = \varepsilon_{\text{Gal}}(s, \text{As}\pi, \psi)$$

とする.  $E = F^2$  の時は, epsilon 因子の明示的な関係式は Jacquet ([Jac72, Corollary 19.16]), 及び, Shahidi ([Sha84, Theorem 5.1.] によって得られている.

筆者は,  $E$  が体の時に, epsilon 因子について Rankin-Selberg 積分を用いた定義と, Weil-Deligne 表現を用いた定義との間の明示的な関係式を証明した. それについて次章で説明する.

## 2. EPSILON 因子同士の明示的な関係式について

この章では筆者の主結果と証明の概略を紹介する. 記号は前章と同様とする. 主結果は以下の通りである.

**定理 2.1.**  $F$  を  $\mathbb{Q}_p$  上有限次拡大とする.  $E$  を  $F$  上の半単純 2 次代数とする.  $\pi$  を無限次元既約許容表現として中心指標を  $\omega$  とする.  $\psi : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を加法的指標として  $\xi \in E^\times$  を  $\mathrm{tr}_{E/F}(\xi) = 0$  満たす元とする. この時, 次が成立する:

$$\omega^{-1}(\xi) |\xi|_E^{-s+1/2} \lambda_{E/F}(\psi) \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) = \varepsilon(s, \mathrm{As}\pi, \psi)$$

ここで,  $\lambda_{E/F}(\psi)$  は Langlands 定数と呼ばれるもので,  $E$  が体の時は,  $E/F$  に対応する 2 次指標の root number であり,  $E = F^2$  の時は 1 である.

証明の概略について述べる. 技術的に鍵となるのは次の  $\varepsilon_{\mathrm{RS}}$  の乗法性である:

**定理 2.2.**  $\mu, \nu : E^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を指標として.  $\pi$  を主系列表現  $\pi(\mu, \nu)$  とする. この時, 次が成立する:

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) = \nu(-1) \varepsilon(s, \mu|_{F^\times}, \psi) \varepsilon(s, \nu|_{F^\times}, \psi) \varepsilon(s, \mu\nu^\sigma, \psi_\xi).$$

この定理の帰結として,  $\pi$  が主系列表現, 及び, 特別表現の時に, 定理 2.1 が従う. 定理 2.2 の証明は,  $\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi)$  の定義に立ち戻り, 良い Whittaker 関数  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\xi)$ , 及び, Bruhat-Schwartz 関数  $\Phi$  を見つけて関数等式 (1.2) の両辺を明示的に計算をすることによる.

従って,  $\mathrm{GL}_2$  の許容表現に関する Langlands 分類により, 問題は  $\pi$  が超尖点形式の場合に帰着される. 重要な事実として, 大域的な epsilon 因子については, Asai 表現の modularity, 及び,  $L$  関数の一致によって, 異なる定義から定まる大域的 epsilon 因子の一致する. 従って,  $\pi$  を大域的な保型表現に持ち上げることで証明が完結する.

**注意 2.3.** 筆者は主に非アルキメデス的な状況を考察したが, アルキメデス的な類似として, 2 次拡大  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  に関する Asai  $L$  関数, 及び, epsilon 因子を同様の Rankin-Selberg 積分を用いて定義し, それらが Weil-Deligne 群の表現との比較を考察するというものがある. これについては, 共同研究者の Cheng 氏により同様の結果が得られている.

**注意 2.4.** 最後に本結果の応用 (動機) について簡単にコメントをしておく. 本研究は筆者が “肥田族に沿う捻れ 3 重積  $p$  進  $L$  関数” を構成するという問題に取り組んでいる際に現れたものである. この問題において, 市野氏によって証明された公式 ([Ich08]) を計算する必要があったが, その計算結果として, Piatetski-Shapiro-Rallis による 3 重積保型表現の epsilon 因子や, 本稿で詳説した Rankin-Selberg 積分を経由して定義された Asai epsilon 因子が現れる. Piatetski-Shapiro-Rallis による 3 重積保型表現の epsilon 因子が対応する Weil-Deligne 表現のものと一致するののかというのも重要な問題であるが, Piatetski-Shapiro-Rallis によるものは今回詳説した Rankin-Selberg 積分による Asai epsilon 因子と関係付くことが証明できる (共同研究者 Chen 氏による). 一方で,  $p$  進  $L$  関数は Weil-Deligne 群の表現から定まる種々の不変量との相性が良いという事情があり, 本研究結果は  $p$  進  $L$  関数の構成の際に現れる計算結果を Weil-Deligne 群の表現から定まる不変量で表示したいという動機に基づくものである.

謝辞. この度は第 14 回数学総合若手研究集会を講演の機会を頂き, また, 本研究集会の企画, 運営を行なってくださった運営委員の皆様へ感謝を申し上げます.

## REFERENCES

- [AR05] Anandavardhanan, U. K., Rajan, C. S., *Distinguished representations, base change, and reducibility for unitary groups*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 14, 841-854.

- [Fl88] Flicker, Y. Z., *Twisted tensors and Euler products*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 295-313.
- [Fl93] Flicker, Y. Z., *On zeroes of the twisted tensor  $L$ -function*, Math. Ann. **297** (1993), no. 2, 199-219.
- [Hen10] Henniart, G., *Correspondance de Langlands et fonctions  $L$  des carrés extérieur et symétrique*, Int. Math. Res. Not. (2010), no. 4, 633-673.
- [Ich08] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product  $L$ -functions*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 281-307.
- [Jac72] Jacquet, H., *Automorphic forms on  $GL(2)$ . Part II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **278**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [JL70] Jacquet, H., Langlands, R., *Automorphic forms on  $GL(s)$ . Part I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **114**. Springer-Verlag, 1970.
- [Kri03] Krishnamurthy, M. *The Asai transfer to  $GL_4$  via the Langlands-Shahidi method*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 41, 2221-2254.
- [Mat09] Matringe, M., *Conjectures about distinction and local Asai  $L$ -functions*, Int. Math. Res. Not. (2009), no. 9, 1699-1741.
- [Pra92] Prasad, D., *Invariant forms for representations of  $GL_2$  over a local field*, Amer. J. Math. **114** (1992), no. 6, 1317-1363.
- [Sha84] Shahidi, F., *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for  $GL(n)$* , Amer. J. Math. **106** (1984), no. 1, 67-111.
- [Sha90] Shahidi, F., *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for  $p$ -adic groups*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273-330.

*E-mail address:* isao.ishikawa@riken.jp