$O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式に付随するテータ級数の構成

加藤 義久　(Yoshihisa Kato)

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程 1 年

概 要

$A \in M(m, \mathbf{Z})$ を正定値対称行列とする. A に関する調和多項式付きのテータ級数とよばれる保型形式の構成法が知られている（[Miyake89, p.192] 参照）. [Funada16] では A として E_8 をとり, 低次の調和多項式の場合にテータ級数が自明にならないような調和多項式を調べられた. 本稿では 対称行列として $A = E_6$ をとり, 同様に低次の場合にテータ級数が自明にならないような調和多項式を調べるとともに, Hecke 作用素 $T(p)$ をテータ級数から成る空間に作用させ, その振る舞いを調べた.

1　調和多項式とテータ級数

m 次実対称行列 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ と, $x \in \mathbf{R}^m$ について $A[x] = {}^t x A x$ と定義する. 実対称行列 A が正定値であるとは任意の $0 \neq x \in \mathbf{R}^m$ について $A[x] > 0$ が成立することを言う.

1.1　調和多項式

定義 1.1.1 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ が正定値であるとし, m 変数複素係数 l 次同次多項式のなす複素ベクトル空間を $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ で表す. $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ の $\mathbf{C}$-部分線形空間 $\mathcal{H}_l(A)$ を

$$\mathcal{H}_l(A) = \{P(x) \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_m]_l \mid \Delta_A P(x) = 0\}$$

で定める. ここで A に関するラプラシアン Δ_A を

$$\Delta_A = \sum_{1 \leq i,j \leq m} a^{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (a^{i,j} \text{は } A \text{ の逆行列 } A^{-1} \text{の } (i,j) \text{ 成分})$$

で定めた. $\mathcal{H}_l(A)$ に属する多項式 P を, 対称行列 A に関する調和多項式 (A-調和多項式) とよぶ.

定理 1.1.2

$$\dim_{\mathbf{C}} H_l(A) = \binom{l+m-1}{m-1} - \binom{l+m-3}{m-1}.$$

ただし, $a < b$ のとき, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ と定める.

1.2　テータ級数の変換公式

$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ を上半平面とする. $SL(2, \mathbf{Z})$ は $\mathbf{H}$ に左から 1 次分数変換として作用することに注意する. $SL(2, \mathbf{Z})$ の部分群 $\Gamma(N)$ を次のように定める.

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \mod N \right\}.$$

定義 1.2.1 部分群 $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{Z})$ が, ある $N \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ について $\Gamma(N) \subset \Gamma$ となるとき, Γ を $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群であるとよび, $\Gamma(N) < \Gamma$ となる最小の N を Γ のレベルと呼ぶ.

商空間 $\Gamma \backslash \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ の元を群 Γ の *cusp* と呼ぶ.

定義 1.2.2 $k \geq 0$ とする. レベル N の合同部分群 Γ と準同型 $\chi : \Gamma \to \mathbf{C}^\times$ について, 関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ が次の条件を満たすとき, 群 Γ についての χ に関する重さ k の *modular form* とよぶ.

(i) f は $\mathbf{H}$ 上正則である.

(ii) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して, $f_k[M](z) = (cz + d)^{-k} f(Mz)$ とすると $f_k[M](z) = \chi(M) f(z)$ が成立する.

(iii) (ii) の $f_k[M]$ を次のようにフーリエ展開する.

$$f_k[M](z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f, M) q^n, \quad (q = \exp(2\pi\sqrt{-1} z/N)).$$

いま, 全ての $M \in SL(2, \mathbf{Z})$ について $n < 0$ ならば $a_n(f, M) = 0$ である.

定義 1.2.3 レベル N の合同部分群 Γ についての準同型 χ に関する重さ $k \in \mathbf{Z}$ の *modular form* 全体からなる群を $M_k(\Gamma, \chi)$ とかく. また

$$S_k(\Gamma, \chi) = \{f \in M_k(\Gamma, \chi) \mid a_n(f, M) = 0({}^\forall M \in SL(2, \mathbf{Z}))\}$$

とかき, $f \in S_k(\Gamma, \chi)$ を群 Γ について準同型 χ に関する重さ k の *cusp form* とよぶ.

ここで, [Miyake89, §4.9] に従って, 調和多項式付きのテータ級数とよばれる保型形式の構成法を述べる.

定理 1.2.4 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{Z})$ を正定値行列とする. $P \in \mathcal{H}_l(A)$ に対して級数 $\theta(z; A, P)$ を

$$\theta(z; A, P) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} P(\xi) \exp(\pi\sqrt{-1} A[\xi] z)$$

で定めるとこれは $\mathbf{H}$ 上広義一様収束する. さらに, $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ を $NA^{-1} \in M(m, \mathbf{Z})$ をみたすものとし, *Dirichlet* 指標 $\chi : \mathbf{Z} \to \{\pm 1\}$ を $\chi(a) = \left(\dfrac{(-1)^{m/2}\det(A)}{a}\right)$(Kronecker 記号 [Miyake89, §3.1]) で定めると, 次が成り立つ.
(i) $\Theta(2z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(4N), \chi)$. ただし, $k = (m/2) + l$ であり,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N \right\}$$

と定めた.
(ii) A が偶, すなわち任意の $\xi \in \mathbf{Z}^m$ について $A[\xi] \in 2\mathbf{Z}$ が成り立つとき,

$$\Theta(z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(2N), \chi).$$

(iii) A と NA^{-1} の対角成分が全て偶数であるとき, $\Theta(z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. さらに $l \geq 1$ ならば, $\theta(z; A, P) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ である.

1.3 不変式の利用

定義 1.3.1 G を有限群, V を有限次元 $\mathbf{C}$-ベクトル空間とする. いま, $\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とする. このとき, V の部分空間 V^G, $V(G)$ をそれぞれ

$$V^G = \{v \in V \mid {}^\forall g \in G,\ \rho(g)v = v\}, \quad V(G) = \langle v - \rho(g)v \mid g \in G,\ v \in V \rangle_{\mathbf{C}}$$

で定める. ここで, V の部分集合 S に対して, S で生成される V の部分ベクトル空間を $\langle S \rangle_{\mathbf{C}}$ と表した.

いま $l \geq 0$, $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{Z})$ とし, $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ を表現空間とする直交群 $O(A, \mathbf{Z}) = \{h \in GL(m, \mathbf{Z}) \mid {}^t\!hAh = A\}$ の表現 ρ を

$$(\rho(g)P)(x) = P(g^{-1}(x)), \quad (x \in M(m, 1; \mathbf{C}),\ g \in O(A, \mathbf{Z}),\ P(x) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l)$$

で定める.

命題 1.3.2 任意の $P(x) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ に対して

$$\Delta_A(\rho(g)P)(x) = \rho(g)(\Delta_A P)(x)$$

が成り立つ.

命題 1.3.2 より $\mathcal{H}_l(A)$ は $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ の部分表現であることが分かる. ここで有限群の表現論から, 次が成り立つことがわかる.

定理 1.3.3 $\mathcal{H}_l(A) = \mathcal{H}_l(A)^{O(A,\mathbf{Z})} \bigoplus \mathcal{H}_l(A)(O(A, \mathbf{Z}))$.

さて, 簡単のために A, NA^{-1} が偶であるとする. このとき, 定理 1.2.4 の (iii) について, Dirichlet 指標 $\chi:\mathbf{Z}\to\{\pm1\}$ を $\chi(a)=\left(\dfrac{(-1)^{m/2}\det(A)}{a}\right)$ で定めると線形写像 $\Theta\equiv\Theta_{A,l}{:}\mathcal{H}_l(A)\to M(\Gamma_0(N),\chi)$ が,

$$\Theta(P)=\Theta(z;A,P)=\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}P(\xi)\mathrm{exp}(2\pi\sqrt{-1}A[\xi]z)\quad(P\in\mathcal{H}_l(A))$$

で定まる. Θ について, 次の命題が容易に示せる.

命題 1.3.4 $P(x)\in\mathcal{H}_l(A)(O(A,\mathbf{Z}))$ に対して

$$\Theta(P)\equiv0.$$

以上より, $\Theta(P)\equiv0$ となるような P を求めるには $\mathcal{H}_l(A)^{O(A,\mathbf{Z})}$ に限定して考えれば良いことが分かる.

2 $O(E_6,\mathbf{Z})$-不変調和多項式の空間

正定値行列 $E_6\in\mathrm{Sym}_6(\mathbf{Z})$ を

$$E_6=\begin{pmatrix}2&0&-1&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0\\-1&0&2&-1&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0\\0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

で定める. これは, E_6 型ルート系の Cartan 行列である. いま, 行列 E_6 は偶, かつ $\det E_6=3$ であり, E_6の 逆行列は

$$E_6^{-1}=\begin{pmatrix}4/3&1&5/3&2&4/3&2/3\\1&2&2&3&2&1\\5/3&2&10/3&4&8/3&4/3\\2&3&4&6&4&2\\4/3&2&8/3&4&10/3&5/3\\2/3&1&4/3&2&5/3&4/3\end{pmatrix}$$

となる. ゆえに, 定理 1.2.4 の (iii) において, $A=E_6$, $N=3$ ととることにより, 写像 $\Theta:\mathcal{H}_l(E_6)\to M_k(\Gamma_0(3),(\frac{-3}{\cdot}))$ を得る. いま, $\mathrm{Im}\Theta$ を調べたい. そのためには, 小節 1.3 の最後の注意により, $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ についてのみ調べれば良い.

2.1 $O(E_6,\mathbf{Z})$ の構造

この小節では, E_6 型ルート系及びそのワイル群 $W(E_6)$ を導入し, $W(E_6)$ と $O(E_6,\mathbf{Z})$ の関係を調べる. まずは E_6 型ルート系を定義する. いま $V=\{{}^t(x'_1,\ldots,\ x'_6,\ y'_1,\ y'_2)\in\mathbf{R}^8\mid\sum_{i=1}^6 x'_i=0,\ y'_1+y'_2=0\}$ とすると, V は $\mathbf{R}^8$ の部分ベクトル空間である. $\mathbf{R}^8$ の標準基底を $e_1,\ldots,\ e_8$ とする. さらに V には $\mathbf{R}^8$ の標準内積 $(,)$ の制限を与える.

命題 2.1.1 V の部分集合

$$\begin{aligned}
R(E_6) &= \left\{\beta\in\frac{1}{2}\bigoplus_{i=1}^{8}\mathbf{Z}e_i\cap V\mid(\beta,\beta)=2\right\}\\
&= \{\pm(e_i-e_j)\mid 1\le i<j\le 6\}\\
&\cup \left\{\pm\left(-(e_i+e_j+e_k)+\frac{1}{2}(S_1-e_7+e_8)\right)\mid 1\le i<j<k\le 6\right\}\\
&\cup \{\pm(e_7-e_8)\}
\end{aligned}$$

は V 内のルート系である. ただし $S_1=\sum_{i=1}^6 e_i$ である. また $R(E_6)$ の基底として次が取れる.

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=e_1-e_2, & \alpha_2&=\frac{1}{2}(-e_1-e_2-e_3+e_4+e_5+e_6-e_7+e_8),\\
\alpha_3&=e_2-e_3, & \alpha_4&=e_3-e_4,\\
\alpha_5&=e_4-e_5, & \alpha_6&=e_5-e_6.
\end{aligned}$$

また, $R(E_6)$ の基底 $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_6$ に関する Cartan 行列 $(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_{1\le i,\ j\le 6}\in M(6,\mathbf{Z})$ は E_6 に一致する.

命題 2.1.1 の $R(E_6)$ を E_6 型ルート系とよぶ. また, $\sharp\ R(E_6)=72$ である. 命題 2.1.1 の $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_6$ に関する鏡映を $s_1,\ldots,\ s_6$ とする. $R(E_6)$ に関する Weyl 群 $W(E_6)$ を

$$W(E_6)=\langle s_1,\ldots,\ s_6\rangle\subset GL(V)$$

で定義される. このとき 次の命題が成り立つ.

命題 2.1.2 (i) 6 次対称群の元

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&5&4&3&1\end{pmatrix}\in S_6$$

について, 命題 2.1.1 対し, $\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}(1\le i\le 6)$ と定めることで, σ を $\mathbf{R}^6$ の自己同型, すなわち $GL(6,\mathbf{Z})$ の元としてみる事が出来る. さらに

$$\mathrm{Aut}(E_6,(,)):=\{f\in GL(V)\mid f(R(E_6))=R(E_6)\text{ かつ }(f(\alpha),f(\beta))=(\alpha,\beta)(\alpha,\beta\in R(E_6))\}$$

とする. このとき

$$W(E_6) \rtimes \langle \sigma \rangle \quad = \quad \mathrm{Aut}(E_6, (,))$$

が成立する.

(ii) $f \in \mathrm{Aut}(E_6, (,))$ のルート系 $R(E_6)$ の基底 $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_6$ に関する行列表示を B_f とかく. このとき $B_f \in O(E_6, \mathbf{Z})$ であり, 線形写像 $\Phi : \mathrm{Aut}(E_6, (,)) \to O(E_6, \mathbf{Z})$ は同型写像となる.

2.2 $W(E_6)$ の basic invariants

まず Chevalley による次の定理を [Humphreys90, p.54] より引用する.

定理 2.2.1 (Chevalley) $W \subset GL(V)$ を鏡映により生成される有限群とし, $V^W = \{0\}$ を仮定する. このとき $\mathbf{C}$-代数として正の次数をもつ n 個の代数的独立な同次多項式 $f_1, \ldots, f_n$ があって

$$\mathbf{C}[x_1, \ldots,\ x_6]^W = \mathbf{C}[f_1, \ldots,\ f_n]$$

が成り立つ.

ここで [Mehta88] に従い, 定理 2.2.1 の生成系 (basic invariant と呼ばれる.) を $\mathbf{C}[x_1, \ldots,\ x_6]^{W(E_6)}$ の場合に具体的に与える.

定理 2.2.2 [Mehta88] $l \in \mathbf{Z}_{>0}$ とし, 多項式 $I'_k(x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2) \in \mathbf{C}[x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2]$ を

$$\begin{aligned} I'_k(x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2) \quad = \quad & \sum_{i<j} (x'_i + x'_j - \frac{1}{3} S_1(x'))^k \\ + \quad & \sum_{i=1}^{6} \left(-x'_i + \frac{1}{2}(y'_1 - y'_2) + \frac{1}{6} S_1(x') \right)^k \\ + \quad & \sum_{i=1}^{6} \left(-x'_i - \frac{1}{2}(y'_1 - y'_2) + \frac{1}{6} S'_1(x) \right)^k \end{aligned}$$

で定める. ただし, $S_1(x') = \sum_{i=1}^{6} x'_i$ である.

このとき, $(\mathbf{C}[x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2]/(x'_1 + \cdots + x'_6, y'_1 + y'_2))^{W(E_6)}$ の代数的独立な生成系として

$$I'_2,\ I'_5,\ I'_6,\ I'_8,\ I'_9,\ I'_{12}$$

がとれる.

3　主定理

$T_{l+3} = \{\theta(z; E_6, P) \mid P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)\}$, $I_l^O = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_6]_l^{O(E_6,\mathbf{Z})}$, $h_l^O = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ とおく. $k = l+3$ について次の表が成立する.

定理 3.0.3 次の表が成立する.

l	k	$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_6)$	I_l^O	h_l^O	$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3}$	$\dim_{\mathbf{C}} S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$
2	5	20	1	0	0	0
4	7	105	1	0	0	1
6	9	336	2	1	1	2
8	11	825	3	1	1	2
10	13	1716	4	1	1	3
12	15	3185	6	2	2	4
14	17	5440	8	2	2	4
16	19	8721	10	2	2	5
18	21	13300	14	4	3	6
20	23	19481	18	4	3	6

定理 3.0.4 Hecke 作用素 $T(2)$ について, $l = 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 18,\ 20$ のとき

$$S_{l+3} = T_{l+3} \bigoplus T(2)(T_{l+3})$$

が成り立つ.

定理 3.0.3 により $l = 18,\ 20$ についてテータ級数を与える写像（テータ写像）は単射にならないことが示せた. 一般にテータ写像の $\mathcal{H}_l(E_6) = \mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ への制限写像を考えたときその核の構造には興味がもたれる. また定理 3.0.4 が一般に $\dim_{\mathbf{C}} S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$ が偶数のときに成り立つのかもまた興味がもたれる.

4　証明の概略

$P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)$ に付随したテータ級数 $\Theta_{E_6,l}(P)$ 全体のなす $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間を T'_{l+3} とする. このとき, 命題 1.4.5 から

$$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3} = \dim_{\mathbf{C}} {T'}_{l+3}$$

が成立する.

さて, $U = \mathbf{R}^6$, $V' = \mathbf{R}^8$ とし, それぞれの標準基底を $e_1, ...,\ e_6$ 及び $e'_1, ...,\ e'_8$ とする. U

と $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_6$ を小節 2.1 で定めたルート系とその基底とする. いま, U と行列 (E_6) で定義される U の計量の組 (U, E_6) と, V' と単位行列 I_8 で定義される V' の計量の組 (V', I_8) を考える. このとき単射線形写像 $\phi : U \to V'$ を任意の $i \in \{1, \ldots,\ 6\}$ に対して

$$\phi(e_i) = \alpha_i$$

で定めると, $R(E_6)$ の Cartan 行列が E_6 に等しいことから, これは計量を保つ写像になる. ここで ϕ の基底 $e_1, ...,\ e_6$ 及び $e'_1, ...,\ e'_8$ に関する行列表示を $B \in M(8, 6, \mathbf{Z})$ とおく. このとき, U, V' の双対空間を U^*, V'^* とし, $e_1, ...,\ e_6$ 及び $e'_1, ...,\ e'_8$ に関する双対基底をそれぞれ, $x_1, ..., x_6$ 及び $x'_1, ..., x'_8$ とする. いま, ϕ の引き戻しである全射線形写像 $\phi^* : V'^* \to U^*,\ \phi(f) = f \circ \phi$ が誘導され これにより不変式 $I'_k(x'_1, \ldots,\ x'_8) \in (\mathbf{C}[x'_1, \ldots,\ x'_8]/(x'_1 + \cdots + x'_6,\ x'_7 + x'_8))^{W'}$ について次が成立する.

$$I_k(x_1, \ldots,\ x_6) := I'_k(\phi^*(x'_1), \ldots,\ \phi^*(x'_8)) \in \mathbf{C}[x_1, \ldots,\ x_6]^{W(E_6)}.$$

ただし, W' は A の各列を基底とする V' 内のルート系 R' の Weyl 群である. よって $\mathbf{C}[x_1, \ldots,\ x_6]^{W(E_6)}$ の代数的独立な生成系が構成された.

補題 4.0.5

$$\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6, \mathbf{Z})} = \begin{cases} \{0\} & (l \text{ は奇数}) \\ \mathcal{H}_l(E_6)^{W(E_6)} & (l \text{ は偶数}) \end{cases}$$

証明 $O(E_6, \mathbf{Z}) = W(E_6) \rtimes \langle\sigma\rangle$ であることに気をつける. ただし

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. また $(\rho(\sigma)I_k) = (-1)^k I_k$ であることが分かる. ただし ρ は小節 1.1 で構成した $O(E_6, \mathbf{Z})$ の作用である. □

補題 4.0.5 から $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6, \mathbf{Z})}$ を調べるためには, $\mathbf{C}[x_1, \ldots,\ x_6]^{W(E_6)}$ の偶数次の元でラプラシアン Δ_{E_6} で消えるものを調べれば良い. Mathematica を用いて具体的に基底を計算することで次を得る.

定理 4.0.6 次の表が成立する.

l	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$	1	0	0	1	1	1	2	2	2	4	4

いま, ここで求めた $\mathcal{H}_l(E_6)$ の基底を用いて $T_{l+3} = \{\theta(z; E_6, P) \mid P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)\}$ の次元を同じく計算する. そのために Hecke 作用素を $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ の基底に対応する Θ 級数にほどこし, T_{l+3} から $S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$ の構造を調べる.

定義 4.0.7 ヘッケ作用素 $T(n) : M_k(\Gamma_0(3), \chi) \to M_k(\Gamma_0(3), \chi)$ を以下で定める.

$$(T(n)f)(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n \text{ かつ } d>0} \sum_{b=0}^{d-1} \chi(a) d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad (f \in M_k(\Gamma_0(3), \chi)).$$

さて $l \geq 1$ のとき $P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)$ は同次多項式なので, $P(0) = 0$ となる. また E_6 は正定値より $E_6[x] = 0$ のとき, $x = 0$ である. ゆえに

$$\Theta(P) \in S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$$

となる. これに気をつけることで以下の定理が示せる. この定理及び系での計算は Mathematica で行ったものである.

定理 4.0.8 T_{l+3} について次の二つが成立する.
(i) $M_3(\mathit{\Gamma}_0(3), \chi) = T_3 \bigoplus T(2)(T_3)$.
(ii) $l = 6$,8, 12, 14, 18, 20 について

$$S_{l+3}(\mathit{\Gamma}_0(3), \chi) = T_{l+3} \bigoplus T(2)(T_{l+3}).$$

系 4.0.9 次の表が成り立つ.

l	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3}$	1	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

参考文献

[Coxeter51] H.S.M. Coxeter, The product of the generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J. **18**, p.765-p.782 (1951).

[DS04] F. Diamond and J. Shurman, A First Course In Modular Forms, Springer (2004).

[Funada16] Y. Funada, $O(E_8, \mathbf{Z})$-不変球関数を用いたテータ関数の構成 , 大阪大学修士論文 (2016).

[Gunning62] R.C.Gunning., Lectures on modular forms,. Annals of Mathematics studies. Princeton University Press (1962)

[Humphreys90] J. E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press (1990).

[Kato17] Y. Kato, $O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式に付随するテータ級数の構成, 大阪大学修士論文 (2017).

[Lang99] S. Lang, Math Talks for Undergraduates Springer (1999).

[Mehta88] M. L .Mehta, Basic Set of Invariant Polynomials for Finite Reflection Group, Communications in Algebra, 16, p1083-p1097, (1988) .

[Miyake89] Toshitsune Miyake, Modular Form Berlin. Tokyo. Springer-Verlag (1989).

[Serre73] J. P. Serre, A Course in Arithmetic, Springer-Verlag (1973).

[Serre87] J. P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Springer-Verlag (1987).