対角的 3 次曲線の Brauer 群の明示的な表示について *

植松 哲也 (Tetsuya UEMATSU)†

概要

Brauer 群は, 体や環, より一般にスキームに対して定義される不変量の一つで, 整数論や幾何的な問題にも応用をもつことが知られている. Brauer 群の元を記述する方法のひとつとして, シンボル (ノルム剰余記号) があり, Chernousov–Guletskiĭ は楕円曲線の Brauer 群の 2-ねじれ部分群をシンボルで記述する研究を行った. 本稿では, 対角的 3 次曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分群について, 彼らの手法を用いた類似の計算によりこれまでに得られた結果を報告する. それに先立ち, 体の Brauer 群とそのシンボルによる表示, 代数多様体の Brauer 群についても解説する.

1 体の Brauer 群

代数多様体の Brauer 群が本稿の主題であるが, その準備として, 体の Brauer 群について概観しておく. 体の Brauer 群についての詳細は, 例えば, [21], [33] などを参照のこと.

1.1 中心的単純環と Brauer 群

K を (可換) 体とする.「何らかの代数的構造を分類すること」は代数学におけるひとつの問題意識として挙げることができるだろう. 例えば, 体の Galois 理論とは, K 上の拡大体のありようが, (絶対) Galois 群という群により捉えられることを主張するものであった. K 上の半単純環を分類する問題を考えるとき, Wedderburn [32, p.94] によれば, それは, 中心的単純環, あるいは斜体 (可除代数) を分類する問題に帰着される. ここで, K 上の中心的単純環とは, K 上の有限次元代数 A で, 単純 (= 両側イデアルは自明なもののみ) かつ中心的 (= A の中心が K に等しい) なものをいう. K 上の中心的単純環の K-同型類の集合を $CSA(K)$ と書くことにする. 再び Wedderburn [32, Theorem 22, 23] によれば, K 上の中心的単純環 A に対して, 正整数 n と K 上の斜体 D (これは K 上中心的となる) が同型を除いて一意的に存在して, $A \cong M_n(D)$ となる. そこで, $CSA(K)$ 上の同値関係 (森田同値) を

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists n \geq 1 \exists m \geq 1 \exists D : K \text{ 上の斜体 s.t. } A \cong M_n(D), B \cong M_m(D)$$

により定義すると, 商集合 $\mathrm{Br}(K) := CSA(K)/\sim$ には K 上のテンソル積によって, 群構造が入ることがわかる (cf. [33, p.49]). この群を体 K の Brauer 群とよぶ. 定義より $\mathrm{Br}(K)$ の各類の代表元としては, K 上の中心的斜体がとれるから, $\mathrm{Br}(K)$ とはいわば「K 上の中心的斜体の分類空間に群構造を入れたもの」である.

---

* 2018 年 1 月 28 日.

† 名城大学理工学部数学科.

例 1.1. いくつかの体に対して, その Brauer 群を紹介する. 証明については, 例えば, [33] を参照せよ.

(1) $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ここで, $\mathbb{H}$ は

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \quad i^2 = j^2 = -1, ij = k = -ji$$

により定義される $\mathbb{R}$ 上 4 次元の斜体で, ハミルトンの四元数体と呼ばれる.

(2) 代数閉体や有限体 K に対して, $\mathrm{Br}(K) = 0$.

(3) p 進体 $\mathbb{Q}_p$（$\mathbb{Q}$ の p 進距離による完備化）に対して, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1.2 ノルム剰余記号

Brauer 群を記述する上で, その Galois コホモロジーによる表示は重要な役割を果たす. K の分離閉包 $\overline{K}$ をひとつ固定し, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とおく. このとき, 自然な同型 $\mathrm{Br}(K) \cong H^2(G_K, \overline{K}^\times)$ が存在する ([21, p.351]). これより, $\mathrm{Br}(K)$ はねじれ群であることがわかるが, その n-ねじれ部分群を ${}_n\mathrm{Br}(K) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{n} \mathrm{Br}(K))$ と書く. Kummer 系列を考えることにより, ${}_n\mathrm{Br}(K) \cong H^2(K, \mu_n)$ であることが分かる. ここに, μ_n は 1 の n 乗根全体のなす乗法群である.

ノルム剰余記号による Brauer 群の記述について述べよう. 以下, n を正整数とし, K の標数は 0 または, n と互いに素であるとする. また, $\mu_n \subset K$ とし, 1 の原始 n 乗根 ζ をひとつ固定しておく. これにより, (自明な) G_K-加群の同型 $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が定まる.

Kummer 理論によれば, Galois コホモロジーの連結準同型 $\delta\colon K^\times \to H^1(G_K, \mu_n)$ は同型 $K^\times/(K^\times)^n \cong H^1(G_K, \mu_n)$ を導く ([21, p.344]).（全射性は, 体の言葉でいえば, K 上の n 次巡回拡大はすべて ある K の元の n 乗根を添加することによって得られるものであるということを意味する）.

また, カップ積と, 先に述べた同型 $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を通じて, 準同型

$$H^1(G_K, \mu_n) \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(G_K, \mu_n) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mu_n^{\otimes 2}) \cong H^2(G_K, \mu_n) \cong {}_n\mathrm{Br}(K)$$

が得られる. δ とこれを合成することにより得られる写像

$$(\cdot, \cdot)_{n,\zeta}\colon K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \to {}_n\mathrm{Br}(K)$$

や, それにより表された元 $(a, b)_{n,\zeta}$ をノルム剰余記号, または単にシンボルとよぶ. 以下, ζ が予め固定されているなど明らかな場合には, シンボルの添字 ζ を書かないことにする.

定義 1.2. K を体とする. 群 $K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ の $a \otimes (1-a)$ (ここに, $a, 1-a \in K^\times$) で生成される部分群による剰余群を K の (2 次) Milnor K-群とよび, $K_2^M(K)$ で表す.

ノルム剰余記号について, 次のことが知られている:

命題 1.3. (1) (Tate (cf. [21, Theorem 6.4.2.])) ノルム剰余記号は $K_2^M(K)$ を経由する.

(2) (Merkurjev-Suslin [19]) ノルム剰余記号は, 同型 $K_2^M(K)/nK_2^M(K) \cong {}_n\mathrm{Br}(K)$ を導く.

これにより, 任意の ${}_n\mathrm{Br}(K)$ の元は, シンボル $(a, b)_{n,\zeta}$ たちの和として表示できることが分かる. すべての元がひとつのシンボルで書き表せるか, あるいは, どれくらいのシンボルを用いれば, ${}_n\mathrm{Br}(K)$ を生成できるのか, ということは, 一般には考察すべき問題として残っている.

1.3 例: Hasse-Minkowski の定理

Brauer 群とそのシンボル表示について, 一つの例を見よう. $\mathbb{Q}$ 上の 3 変数 2 次形式に関する Hasse-Minkowski の定理は次のようなものであった. 以下, $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ とかく.

命題 1.4. $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ とし, $f = ax^2 + by^2 - z^2$ とおく. このとき, 次の条件は同値である:

(a) f は $\mathbb{Q}$ において非自明な零点をもつ.
(b) f は すべての $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{Q}_\infty$ において非自明な零点をもつ.

証明は例えば [33] や [26] を見よ. [33] でも述べられているように, この定理は, Brauer 群の言葉で解釈することができる. まず, 先にでてきた $\mathbb{H}$ の一般化として, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_\infty$ (一般に標数が 2 と異なる体であればよい) と $a, b \in K$ に対して,

$$\left(\frac{a, b}{K}\right) = K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kk, \quad i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = k = -ji$$

により, 四元数環を定義することができる. これは $\mathit{CSA}(K)$ の元を定める. この四元数環について, 次のことが知られている ([33]):

命題 1.5. (1) $\left(\dfrac{a, b}{K}\right)$ が定める $\mathrm{Br}(K)$ の元はシンボル $(a, b)_2$ に等しい.
(2) f が K において非自明な零点をもつ $\Leftrightarrow (a, b)_2 = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

一般に, 体の拡大 L/K があれば, $\mathit{CSA}(K) \to \mathit{CSA}(L); A \mapsto A \otimes_K L$ により, 準同型 $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)$ が導かれる. 命題 1.5 によれば, Hasse-Minkowski の定理は次の Brauer 群に関する次の写像の単射性 (局所大域原理) を述べるものに他ならない:

$${}_2\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \bigoplus_{p:\text{素数または } \infty} {}_2\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p).$$

注意 1.6. (1) 終域の p に関する部分が直積でなく, 直和になることは自明ではない.
(2) 今は, 2-ねじれ部分群のみを考えたが, この準同型の単射性は, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ 全体を考えても正しく, また, その準同型の余核も知られている. さらに, $\mathbb{Q}$ に限らず, 任意の代数体に対しても, すべての有限素点, 無限素点に関する和を考えることによって, この結果は一般化される (例えば, [21, Theorem 8.1.17]).
(3) 実素点を持たないような代数体 K の場合, この結果は, 1 次元の算術的スキーム $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ ($\mathcal{O}_K$ は K の整数環) の加藤ホモロジー $KH_1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の自明性に対応するものであり, より高次元の算術的スキーム X に対しても類似の局所大域原理の成立が予想されている (加藤予想, 詳しくは, [14], [24] などを参照.)

2 代数多様体の Brauer 群

ここでは, 代数多様体の Brauer 群の定義と, それらの計算例, とくに, 本研究の先行研究である Chernousov-Guletskiĭ [4] の結果について紹介する. 代数多様体の Brauer 群についての詳細は, [10], [11], [12], [20] などを参照のこと.

2.1 代数多様体の Brauer 群

体上の中心的単純環がどれくらいあるのか, という問題意識から 体の Brauer 群が生じたが, 環や代数多様体 (スキーム) 上でも類似の構造がどれくらいあるのかを考察することは自然な流れであろう. 東屋による局所環上の「中心的単純環」(現在では東屋代数と呼ばれている) の研究 [2] を経て, Grothendieck の一連の論文 [10], [11], [12] において, 代数多様体 X の Brauer 群 $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ が定義された. 一方, 体の Galois コホモロジーの, 代数多様体に対する類似物としてエタールコホモロジーが構築され, $H^2(G_K, \overline{K}^\times)$ に対応するものとして, その文脈では自然に (コホモロジカル) Brauer 群 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ が定義される.

注意 2.1. 2 つの定義について, いくつか補足をしておく.

(1) この 2 つを比較するような文脈では, コホモロジカル Brauer 群は $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ のねじれ部分群 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)_{tor}$ として定義されることが多い. なお, 正則なスキームであれば, $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ 自体がねじれ群となることが知られている ([11, Corollarie 1.10]).
(2) 一般に単射準同型 $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ が存在する ([20, IV, Theorem 2.5.]).
(3) $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ と $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)_{tor}$ が同型になるための条件としては, 例えば, Gabber による結果が知られている (de Jong によるプレプリント [8] 参照).

本稿では, 後者の群について考察したい:

定義 2.2. X を代数多様体 (スキーム) とする. $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ を X の Brauer 群とよぶ.

体 K 上の連結な非特異代数多様体 X に対して, その関数体を $K(X)$ と書くことにする. Grothendieck [11, Corollarie 1.10.] によれば, $\mathrm{Br}(X)$ から $\mathrm{Br}(K(X))$ には自然な単射が存在し, したがって, 代数多様体の Brauer 群は体の Brauer 群の部分群として捉えることができる. しかしながら, どのような部分群であるかについては, 一般にはわかっていないことが多く, 興味ある研究対象である. 以下, いくつかの代数多様体 X に対し, その Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ の具体的記述に関する結果を紹介したい.

$\pi\colon X \to \operatorname{Spec} K$ を構造射とするとき, $\pi^*\colon \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(X)$ が誘導される. $X(K) \neq \emptyset$ のときには, π^* は単射となることに注意する. これにより, $\mathrm{Br}(K)$ を $\mathrm{Br}(X)$ の部分群とみなす.

2.2 対角的 3 次曲面の Brauer 群

K を体とし, $b, c, d \in K^\times$ とする. $X_{b,c,d}$ を 斉次方程式 $x^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = 0$ で定義される $\mathbb{P}^3_K$ 内の曲面とし, これを対角的 3 次曲面とよぶ. [18], [5], [7], [30] などにおいて, $X_{b,c,d}$ の Brauer 群の構造や記述が調べられている.

命題 2.3. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \subset K$ とする. 1 の原始 3 乗根 ω を固定する. $f, g \in K(X)^\times$ を

$$f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g := \frac{x + z}{x + y}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

(1) (cf. [5, Proposition 1]) $\mathrm{Br}(X_{1,1,1}) = \mathrm{Br}(K)$.

(2) ([18, §45]) $d \notin (k^\times)^3$ とすると, $\mathrm{Br}(X_{1,1,d}) = \mathrm{Br}(K) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d,f)_3 \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d,g)_3$.

(3) ([30, Theorem 4.1], cf. [7]) $c, d, cd, d/c \notin (K^\times)^3$ とすると, $\mathrm{Br}(X_{1,c,d}) = \mathrm{Br}(K) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d/c, f)_3$.

(4) ([5, Proposition 1], [30, Theorem 5.1])「一般の」$X_{b,c,d}$ に対しては, $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})/\mathrm{Br}(K) \cong 0$ または $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

注意 2.4. (1) これらの結果は, 対角的 3 次曲面 X の Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ を $\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ の Picard 群 $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の Galois コホモロジー $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ を用いて記述することによって本質的に得られるものである. これは, あとで紹介する主結果においても用いられる手法であるので, 詳しくは, 上に挙げた論文や, 本稿の §3.2 を参照されたい.

(2) $\mu_3 \not\subset K$ の場合にも $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})$ をシンボルの余制限写像による像, というかたちで記述する結果が知られている ([7, Proposition 2.1.], [25, Proposition 4.2.6] など参照).

(3) (4) については, どちらの場合も起こりうる. また, $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})/\mathrm{Br}(K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の場合に, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の生成元を, (2) や (3) のように b, c, d を用いたシンボルでは書き表せないことが知られている ([30, Corollary 5.3]).

他の代数多様体に関する結果や Brauer 群の応用について, いくつか注意をしておく.

注意 2.5. (1) $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K) := \mathrm{Coker}\,\pi^*$ とおく. より一般の 3 次曲面に対しても, $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の取りうる群構造については, Swinnerton-Dyer [29] により研究されており, 0, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のいずれかに同型であることが知られている.

(2) この他に, アフィン対角的 2 次曲面 ([31]) や対角的 4 次曲面 ([3]), 2 次曲線束 ([28]) などについても, Brauer 群のシンボルによる表示が考察されている. また, 標数 0 の体上の 3 次元以上の非特異な完全交叉 (例えば, 超曲面など) に対しては, $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(K)$ となることが知られている ([23, Proposition A.1]). 一般の高次元多様体については, 有理性問題などとの関係もあり, 多くの研究がなされている (例えば, [1], [6], [22] などを参照).

(3) 代数体 K 上の代数多様体 X に対し, Manin [17] は Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ を用いて, 現在では Brauer-Manin 障害と呼ばれている集合を構成した. これは, 定義から有理点集合 $X(K)$ を含んでおり, したがって, すべての K の完備化 K_v に対し, $X(K_v) \neq \emptyset$ が成り立っているような X について, この Brauer-Manin 障害が空集合であることを示すことで, 局所大域原理の反例を構成することができる. 例えば, 論文 [5] では, この障害を用いた, $\mathbb{Q}$ 上の対角的 3 次曲面の局所大域原理の反例構成がなされている.

2.3 楕円曲線の Brauer 群の 2-ねじれ部分

Chernousov–Guletskiĭ は論文 [4] において, 3 次の分離多項式 $f(x) \in K[x]$ を用いて, アフィン方程式 $y^2 = f(x)$ で定義された楕円曲線 E/K について, その Brauer 群の 2-ねじれ部分群をシンボルによって書き表す研究を行った. 以下, K は標数が 2 と異なる体とし, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ とする（a, b, c は相異なる K の元）.

注意 2.6. 論文 [4] においては, 3 次多項式 $f(x)$ が 1 次式と 2 次式の積になる場合, K 上既約な場合についても, 考察されている.

彼らの結果は次のようなものである:

定理 2.7 ([4], Theorem 3.6)**.** K を標数が 2 と異なる体, a, b, c を相異なる K の元, E を $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ で定義される K 上の楕円曲線とする. このとき

$$ {}_2\mathrm{Br}(E) = {}_2\mathrm{Br}(K) \oplus \langle (r, x-b)_2, (s, x-c)_2 \mid r, s \in K^\times \rangle $$

であり, さらに, $(r, x-b)_2 + (s, x-c)_2 = 0$ となるのは, $r, s \in (K^\times)^2$ であるとき以外では, 以下の 3 つの場合に限る:

(i) $(u-c, x-b)_2 + (u-b, x-c)_2$. ($u \in K$ は $(u, v) \in E(K)$ となる $v \in K^\times$ が存在するような元)
(ii) $(b-c, x-b)_2 + ((b-c)(b-a), x-c)_2$.
(iii) $((c-a)(c-b), x-b)_2 + (c-b, x-c)_2$.

3 対角的 3 次曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分

3.1 主結果

対角的 3 次曲線 $C : ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ の Brauer 群の 3-ねじれ部分群を, §2.3 で紹介した Chernousov–Guletskiĭ の結果の証明手法を利用して計算した結果を紹介する. 最終的には任意係数で考察することを目標としているが, 現時点では Fermat 曲線, すなわち $a = b = c = 1$ の場合についてのみ, 結果を述べる. とくに, Fermat 曲線は有理点 $(-1 : 1 : 0)$ をもつので, 楕円曲線であることに注意する.

まず, 体 K が μ_3 を含む場合には, 次のような結果を得た. なお, この結果は, [34] においても報告したものである. 以下, 1 の原始 3 乗根 $\omega \in K$ をひとつ固定しておく.

定理 3.1. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \subset K$ とする. E を $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ で定義される K 上の 3 次フェルマー曲線とする. $f, g \in K(E)^\times$ を次のように定める:

$$ f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g := \frac{x + z}{x + y}. $$

このとき, 以下が成り立つ:

$$ {}_3\mathrm{Br}(E) = {}_3\mathrm{Br}(K) + \langle (a, f)_3, (b, g)_3 \mid a, b \in K^\times \rangle. $$

Manin が考察した $X_{1,1,d}$ 型の対角的 3 次曲面は, $w = 0$ という平面切断により, 楕円曲線 E を閉部分多様体として含んでおり, そこから誘導される $\mathrm{Br}(X_{1,1,d}) \to \mathrm{Br}(E)$ によって, $\mathrm{Br}(E)$ の元を得ることができるが, 定理 3.1 によれば, この d を動かすことによって, ${}_3\mathrm{Br}(E)$ のすべての元が生成できるということがわかる.

K が μ_3 を含まない場合には次の結果を得た. $L = K(\omega)$ とおく. これは, K の 2 次拡大であり, その Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元を σ とおく. また, Brauer 群の間に $\mathrm{cores}_{L/K} \colon \mathrm{Br}(E_L) \to \mathrm{Br}(E)$ が導かれる. ここに, $E_L := E \times_K L$ は E を L に係数拡大したものである.

定理 3.2. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \not\subset K$ とする. E を $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ で定義される K 上の 3 次フェルマー曲線とする. $f, g \in L(E)^\times$ を次のように定める:

$$ f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g = \frac{x + z}{x + y}. $$

このとき, 以下が成り立つ:

$$ {}_3\mathrm{Br}(E) = {}_3\mathrm{Br}(K) + \langle \mathrm{cores}_{L/K}((a\cdot\sigma a, f)_3 + (a/\sigma a, g)_3) \mid a \in L^\times \rangle. $$

3.2 証明の方針

Chernousov–Guletskiĭ [4] においては, Brauer 群の 2-ねじれ部分群を調べるために, 楕円曲線 E の 2 等分点のなす G_K-加群 $E[2] := \mathrm{Ker}(E(\overline{K}) \overset{\times 2}{\to} E(\overline{K}))$ を考察しているが, 我々の設定では, 3 等分点のなす G_K-加群 $E[3]$ を考える必要がある. その点において, 考察すべき Galois 作用などは変わってくるが, 本質的な計算手法は Chernousov–Guletskiĭ のものと同様である. 以下, もう少し具体的に解説する.

1. まず, $\mathrm{Br}(E)$ を Galois コホモロジー $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E}))$ と結びつける. これには, Hochschild-Serre スペクトル系列 $E^{p,q} = H^p(G_K, H^q(\overline{E}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(E, \mathbb{G}_m)$ を用いればよいが, 写像の具体的な記述を調べるために, E の Brauer 群の Galois コホモロジーによる記述 ([16, §1])

$$ \mathrm{Br}(E) = \mathrm{Ker}(H^2(G_K, \overline{K}(E)^\times) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(\overline{E}))) $$

と, $1 \to \overline{K}(E)^\times/\overline{K}^\times \to \mathrm{Div}(\overline{E}) \to \mathrm{Pic}(\overline{E}) \to 1$ から生じる完全列

$$ 0 \to H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) \to H^2(G_K, \overline{K}(E)^\times/\overline{K}^\times) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(\overline{E})) $$

を用いて, 準同型 $\mathrm{Br}(E) \to H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E}))$ を構成する. この構成については, [4] の他, [16], [30, p.687] などを参照のこと. いまの設定においては, この写像は分裂する全射であることがわかり, その核は $\mathrm{Br}(K)$ である.

2. 対角的 3 次曲面 X に対する先行研究においては, $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ と具体的に群構造がわかっており (例えば, [13, V.4]), Galois 作用も記述できていたために, Galois コホモロジーを具体的に計算することによって, Brauer 群を生成するシンボルを得ることができた. 一方, 楕円曲線の場合には, $\mathrm{Pic}(\overline{E})$ の構造を直接みるのではなく, 次のような方法を取る. E は楕円曲線であるから, Picard 群の次数 0 部分に対し, 同型 $\mathrm{Pic}^0(\overline{E}) \cong E(\overline{K})$ が存在する (cf. [27, III, Proposition 3.4.]). このことから, $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) \cong H^1(G_K, E(\overline{K}))$ が導かれる. さらに, 楕円曲線の 3 倍写像から導かれる長完全列から, 短完全列

$$ 0 \to E(K)/3E(K) \to H^1(G_K, E[3]) \to {}_3H^1(G_K, E(\overline{K})) \to 0 $$

が導かれる (cf. [4], [27]).

3. 最後に, $\mu_3 \subset K$ であれば, $E[3] \cong \mu_3 \oplus \mu_3$ によって, $H^1(G_K, E[3])$ の元は, $K^\times \times K^\times$ の元によって, 記述することができる. これにより, シンボルと結びつけやすそうな群にたどり着くことができたので, あとは, 以上の写像の構成を具体的に追いつつ, うまく $K(E)^\times$ の元を見つけて, 以下の図式を可換にするような写像 ϵ を構成すればよい:

$$ \begin{tikzcd} K^\times \times K^\times \arrow[rr] \arrow[d, "\epsilon"'] & & H^1(G_K, E[3]) \arrow[d] \\ {}_3\mathrm{Br}(E) \arrow[r] & H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) \arrow[r] & {}_3H^1(G_K, E(\overline{K})). \end{tikzcd} $$

$\mu_3 \not\subset K$ のときは, $E[3]$ が G_K-加群として非自明であるから, 拡大体 L で同様の議論をした後に, K 上に戻る必要がある. $\mu_3 \subset K$ の場合に比べ, ϵ にあたる写像の構成はより複雑になるが, その詳細について

は, 上の図式の可換性の証明や任意係数の場合の考察とともに, 論文としてまとめ, 追って報告する予定である.

注意 3.3. 本研究は曲線 C の Brauer 群 $\mathrm{Br}(C)$ を C の言葉で記述することを目的とするものであって, これとはやや方向性が異なるが, Weil-Châtelet 群 $H^1(G_K, E(\overline{K}))$ の各元に対応する曲線 C に対応する ${}_3\mathrm{Br}(E)$ の元を東屋代数として記述する研究が, [15], [9] においてなされている.

謝辞

本報告の執筆および講演の機会を与えてくださいました第 14 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に感謝申し上げます. 本研究は, 科研費（課題番号:15K17526）の助成を受けたものである.

参考文献

[1] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), no. 3, 75–95.

[2] G. Azumaya, *On maximally central algebras*, Nagoya Math. Journal **2** (1951), 119–150.

[3] M. Bright, *Brauer groups of diagonal quartic surfaces*, Journal of Symbolic Computation **41** (2006), 544–558.

[4] V. Chernousov and V. Guletskiĭ, *2-torsion of the Brauer group of an elliptic curve: generators and relations*, Proceedings of the Conference on Quadratic Forms and Related Topics(LSU, Baton Rouge, 2001). Documenta Math., Extra vol., 2001, pp. 85–120.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, and J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[6] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'example d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), 141–158.

[7] J.-L. Colliot-Thélène and O. Wittenberg, *Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines*, Amer. J. of Math. **134** (2012), no. 5, 1303–1327.

[8] A. J. de Jong, *A result of Gabber*, preprint, `http://www.math.columbia.edu/~dejong/paper/2-gabber.pdf`.

[9] T. Fisher, *On some algebras associated to genus one curves*, arXiv:1707.08330v1, 2017.

[10] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–65.

[11] ———, *Le groupe de Brauer II*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 66–87.

[12] ———, *Le groupe de Brauer III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 88–188.

[13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977.

[14] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, J. Reine Angew. Math. **366** (1986),

142–183, With an appendix by J.-L. Colliot-Thélène.

[15] J.-M. Kuo, *On an algebra associated to a ternary cubic curve*, J. Algebra **330** (2011), 86–102.

[16] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. Math. **7** (1969), 120–136.

[17] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes de Congrès international de Mathématiciens (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[18] ———, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Translated from Russian by Hazewinkel, M.

[19] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.

[20] J. S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1980.

[21] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[22] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, to appear in the proceedings of the AMS Algebraic Geometry Summer Institute, SLC 2015.

[23] B. Poonen and J. F. Voloch, *Random diophantine equations*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser, 2004, pp. 175–184.

[24] S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes*, Proceedings of the International Congress of Mathematics (New Delhi), vol. II, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 558–585.

[25] S. Saito and K. Sato, *Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 3, 505–537.

[26] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Graduate Text in Mathematics, no. 7, Springer-Verlag, 1973.

[27] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, 2009.

[28] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[29] P. Swinnerton-Dyer, *The Brauer group of cubic surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (1993), no. 3, 449–460.

[30] T. Uematsu, *On the Brauer group of diagonal cubic surfaces*, Q. J. Math. **65** (2014), no. 2, 677–701.

[31] ———, *On the Brauer group of affine diagonal quadrics*, Journal of Number Theory **163** (2016), 146–158.

[32] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*, Proc. London Math. Soc. **s2-6** (1908), no. 1, 77–118.

[33] 斎藤秀司, **整数論**, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 20, 共立出版, 1997.

[34] 植松哲也, 3 次フェルマー曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分について, 2018 年度日本数学会年会代数学分科会アブストラクト集, 2018.