

放物接続のモジュライ空間のコホモロジー について

松原 祐貴 (Yuki Matsubara) *

Abstract

放物接続のモジュライ空間の具体的な幾何学的特徴を調べることは、幾何学的ラングランズ予想の観点からも興味深いものである。D.Arinkin は構造群を SL_2 として確定特異点が 4 点ある場合の幾何学的ラングランズ予想を幾何学的手法により解決した。確定特異点が 5 点の場合は未解決である。今回、後者の場合を定式化し、それにかかわるコホモロジーをいくつか計算することができたので報告する。

1 序論

$Conn(X, r)$ を、滑らかな複素射影曲線 X 上の階数が r であるベクトル束に付随する接続のモジュライ空間とし、 $Bun(X, r)$ を X 上の階数が r であるベクトル束のモジュライ空間とする。

$GL(r)$ に対する圏論的ラングランズ予想とは、 $Conn(X, r)$ 上の \mathcal{O} -加群のなす導来圏と、 $Bun(X, r)$ 上の D -加群のなす導来圏とが圏同値である、という予想である。

Arinkin は [1] において、 $X = \mathbb{P}^1, r = 2$ として 4 点の確定特異点がある場合について、この予想を証明した。この場合、 $Bun(X, r)$ として放物構造を持ったベクトル束のモジュライ空間を考えることになる。(より詳しく、[1] では $SL(2)$ -接続と $PGL(2)$ -束に対して考察している。)

ここでは [1] の結果を、確定特異点が 5 点ある場合に拡張することを試みる。

2 放物接続について

この節では w -安定 ν -放物接続のモジュライ空間を導入する。

*神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程後期 1 年 (e-mail : ymatuba@math.kobe-u.ac.jp)

リーマン球面 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 上の異なる n 点 $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ を固定し, \mathbf{t} に関する因子を $D = t_1 + \dots + t_n$ と定義する.

Definition 2.1. \mathbb{P}^1 上の階数が 2 で D 上に特異点を持つ対数的接続とは, 次を満たす組 (E, ∇) のことをいう: $d \in \mathbb{Z}$ とする.

- (1) E は \mathbb{P}^1 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束,
- (2) $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D)$ は次を満たす層の写像である.

$$\nabla(fs) = s \otimes df + f\nabla(s), \quad f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s \in E.$$

対数的接続 (E, ∇) に対して, 留数行列 $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla) \in \text{End}(E_{t_i}) \simeq M_2(\mathbb{C})$, ($1 \leq i \leq n$) を定義する. $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有値を $\{\nu_i^+, \nu_i^-\}$ とする. これを ∇ の t_i での局所指数という. Fuchs の関係式により, $\sum_i (\nu_i^+ + \nu_i^-) = -\deg(E) = -d$ が成り立つ. ここで, 局所指数の集合を次のように定義する.

$$\mathcal{N}_n(d) := \left\{ \nu = (\nu_i^{\pm})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{2n} \mid d + \sum_{1 \leq i \leq n} (\nu_i^+ + \nu_i^-) = 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^{2n-1}.$$

Definition 2.2. $\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般であるとは次の 2 つを満たすことをいう.

- (1) 任意の i に対して, $\nu_i^+ - \nu_i^- \notin \mathbb{Z}$,
- (2) 次が成立する.

$$\text{任意の } (\epsilon_i) \in \{+, -\}^n \text{ の取り方について } \sum_{i=1}^n \nu_i^{\epsilon_i} \notin \mathbb{Z}$$

$\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般でないとき, 特殊であるという.

\mathbb{P}^1 上の正則直線ベクトル束 $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ と対数的接続 $\nabla_L : L \rightarrow L \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D)$ を固定する. ∇_L は各 t_i において留数固有値 $\nu_i^+ + \nu_i^-$ を持つ.

Definition 2.3. $\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ を固定する. (\mathbb{P}^1, D) 上の (L, ∇_L) を行列式束に持つ階数が 2 の ν -放物接続とは組 $(E, \nabla, \varphi, \mathbf{l} = \{l_i\})$ であって, 次を満たすもののことをいう:

- (1) (\mathbb{P}^1, D) 上の対数的接続 (E, ∇) であって, 階数が 2 で局所指数 ν を持つもの.

- (2) 次の関係式を満たす直線ベクトル束の同型写像 $\varphi: \bigwedge^2 E \rightarrow L$;
 E の任意の局所切断 s_1, s_2 に対して

$$\varphi \otimes id(\nabla s_1 \wedge s_2 + s_1 \wedge \nabla s_2) = \nabla_L(\varphi(s_1 \wedge s_2)).$$

- (3) 1次元部分空間 $l_i \subset E_{t_i}$ であって, $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ は l_i に対して ν_i^+ を掛ける
 ことで作用するもの.

ν が一般的なものについて l_i は $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ の ν_i^+ に関する固有空間に他ならない. ゆえに, $\mathbf{l} = \{l_i\}$ は (E, ∇) から一意に定まる.

安定性を導入するために重さ \mathbf{w} を定義することによって, \mathbf{w} -安定 ν -放物
 接続 (E, ∇, \mathbf{l}) のモジュライ空間 $M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu)$ を構成することができる. $M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu)$
 は次元が $2(n-3)$ である滑らかで既約な準射影的代数多様体になることが知
 られている ([5]). 一般の ν について (E, ∇, φ) は既約であり, この場合すべての
 の組 (E, ∇, φ) が安定対象となる.

このようなモジュライ空間はガルニエ系と呼ばれる常微分方程式の初期
 値空間に対応し, 特に $n=4$ の場合は第 VI パンルヴェ方程式に対応する. こ
 れらは, 線形接続のモノドロミー保存変形として得られる微分方程式である.

初等変換により, $d = \deg(E) = -1$ としてよい. また, $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$
 として

$$\begin{cases} \nu_i^+ = \nu_i & (i = 1, \dots, n) \\ \nu_i^- = -\nu_i & (i = 1, \dots, n-1) \\ \nu_n^- = 1 - \nu_n, \end{cases}$$

とできる. ここで \mathcal{M} を ν - \mathfrak{sl}_2 -放物接続のモジュライスタックとし, 対応する
 粗モジュライ空間を M とする. 上記の変換により $M \simeq M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu)$ なる同型
 対応を得る.

3 放物ベクトル束について

この節では放物ベクトル束のモジュライ空間について述べる.

Definition 3.1. $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の階数が 2 で次数が d の準放物ベクトル束とは, 次
 を満たす組 (E, \mathbf{l}) のことをいう:

- (1) \mathbb{P}^1 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束 E ,
- (2) E_{t_i} の 1次元部分ベクトル空間 l_i の組 $\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_n)$

この \mathbf{l} を準放物ベクトル束の放物構造という. また, 重み $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_n)$
 の情報を合わせて考える場合は (E, \mathbf{l}) を放物ベクトル束という.

Definition 3.2. 準放物ベクトル束 (E, \mathcal{L}) は、与えられた局所指数 ν を持つ接続 ∇ が付随するとき ν -平坦であるという。

\mathcal{P}_d を直既約で次数が d の放物ベクトル束のモジュライ空間とし、対応する粗モジュライ空間を P_d とする。 $\mathcal{P}_d \rightarrow P_d$ は \mathbb{G}_m -ジャープである。

実は、 (E, \mathcal{L}) が ν -平坦であることと直既約であることは同値である。この事実により、 M から $P := P_{-1}$ への忘却写像 $(E, \nabla, \varphi) \mapsto (E, \mathcal{L})$ が定義される。 ν を一般として取っておくことにより、放物構造 $\mathcal{L} = \{l_i\}$ を固有値 ν_i^+ に対応する $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有空間 $l_i \subset E_{t_i}$ と見なすことができる。

一方で、粗モジュライ空間 P_d は非分離スキーム (トポロジカルには non Hausdorff) である。 $n = 4$ の場合、 P は t_1, \dots, t_4 で 2 重点を持った射影直線と同一視される ([3], [8])。

$n = 5$ の場合、 P はいくつかの射影曲面を貼り合わせたものとして構成できる ([6])。その幾何学的性質は 4 次 del Pezzo 曲面、つまり \mathbb{P}^2 を 5 点でブローアップしたものと関連している。より具体的に、貼り合わされる射影曲面のうち一つは \mathbb{P}^2 と同型であり、conic としての自然な埋め込み $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow X := \mathbb{P}^2$ が存在する。この像を Π とする。この埋め込みによる $t_1, \dots, t_5 \in \mathbb{P}^1$ の像でのブローアップ $\phi: \hat{X} \rightarrow X$ を考える。このとき、定義から \hat{X} は 4 次 del Pezzo 曲面である。ブローアップによる例外因子を $\Pi_i \subset \hat{X}$ とし、 X 内で t_i と t_j を結ぶ曲線の固有変換を $\Pi_{ij} \subset \hat{X}$ で表す。この $\Pi, \Pi_i, \Pi_{i,j}$ は古典的によく知られている 4 次 del Pezzo 曲面上に 16 本存在する (-1) -曲線と対応する。

4 フーリエ向井変換について

Y をアーベル多様体とし、 Y^\natural により Y の \mathbb{G}_m による \natural -extension のモジュライ空間を表す。ここで \natural -extension とは Y 上の平坦束であって、ある条件を満たすもののことをいう。

このとき、 Y 上の D_Y -加群のなす導来圏と \mathcal{O}_{Y^\natural} -加群のなす導来圏の間に、自然な圏同値が存在する。この圏同値は、 $Y \times Y^\natural$ 上の普遍束であって Y 方向の接続が付随した \mathcal{P} を用いて定義される。(この \mathcal{P} をポアンカレ束ともいう)。

またその圏同値性の証明には、 \mathcal{P} が \mathcal{O}_{Y^\natural} -加群の orthogonal Y -family であり、かつ D_Y -加群の orthogonal Y^\natural -family であるという事実が用いられる。ここで言う orthogonal とは、2 つの異なるベクトル束のテンソル積のコホモロジーが 0 になることを指す。

本稿では、 M が Y^\natural の役割を、 P が Y の役割を果たす。つまりフーリエ向井変換による圏同値によって、圏論的ラングランズ対応を示すことを目的とする。

5 主結果

\hat{X} を 4 次 del Pezzo 曲面, つまり \mathbb{P}^2 を 5 点でブローアップしたものとする. $\mathbf{x} \in \hat{X}$ に対し, \mathcal{M} 上のベクトル束 $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}$ を (E, ∇, φ) 上のファイバーが $E'_{x_1} \otimes E'_{x_2}$ となるものとして定義する. ここで, E' は t_5 において E を上方変換したものを表し, $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は $2:1$ 被覆写像 $\Psi: \hat{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ による \mathbf{x} の像とする.

Theorem 5.1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \hat{X}$ とする. このとき

$$(1) H^i(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & i = 0 \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

$$(2) H^i(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\mathbf{x}} \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{y}}) = 0, \text{ for } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, i \geq 0.$$

また \mathcal{E} を $\mathcal{M} \times \hat{X}$ 上の普遍ベクトル束と見なす. \mathcal{E} を適当に変換した D_P -加群 \mathcal{E}_{ν} をフーリエ向井核とするフーリエ向井変換が, 考察対象としている場合の圏論的ラングランズ対応を導くと予想される.

Cojecture 5.2. 関手

$$\Phi_{\mathcal{M} \rightarrow P}: \mathcal{F} \mapsto Rp_{2,*}(\mathcal{E}_{\nu} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times P}} p_1^* \mathcal{F})[1]$$

は $D_{qc}(\mathcal{M})^-$ と D_P -加群のなす導来圏の間の圏同値を導く.

References

- [1] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of $SL(2)$ -bundles with connections on P^1 minus 4 points.*, Selecta Math., New Series 7 (2001), 213-239.
- [2] D. Arinkin, R. Fedorov, *An example of the Langlands correspondence for irregular rank two connections on \mathbb{P}^1 .* Adv. Math., 230(3):1078-1123, 2012.
- [3] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$,* Internat. Math. Res. Notices (1997), no. **19**, 983–999.
- [4] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, F. Ehlers, *Algebraic D -modules*, Perspectives in Mathematics, 2. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

- [5] M. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann- Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (2006), no. **4**, 987-1089.
- [6] F. Loray, M.-H. Saito, *Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line*. Internat. Math. Res. Notices (2015), no. **4**, 995–1043.
- [7] A. Komyo, M.-H. Saito, *Explicit description of jumping phenomena on moduli spaces of parabolic connections and Hilbert schemes of points on surfaces*, accepted in *Kyoto Journal of Mathematics*. (arXiv:math/1611.00971)
- [8] S. Oblezin, *Isomonodromic deformations of $\mathfrak{sl}(2)$ Fuchsian systems on the Riemann sphere*. Mosc. Math. J. 5 (2005), no. **2**, 415–441, 494–495.
- [9] N. Fernandez Vargas, *Geometry of the moduli of parabolic bundles on elliptic curves*. Trans. of the AMS (to appear). (arXiv:1611.05417)