二重余接関数の加法型公式

加藤正輝 (Kato Masaki)
神戸大学大学院理学研究科数学専攻

概 要

二重正弦関数は Hölder, 新谷, 黒川らによって研究されてきた特殊関数であり、整数論や数理物理において様々な応用を持つことが知られている. この講演では, 二重正弦関数の対数微分である二重余接関数がある加法型公式を持ち, それが Ramanujan の公式や二重ゼータ値の parity result など様々の公式を含むことを示す. 多重正弦関数の超超越性や加法型公式の楕円関数論的拡張についても述べたい.

目 次

1 はじめに

Hilbert は１９００年の国際数学者会議において次のような問題を提唱した: 与えられた代数体 K に対してその特殊値が K の Abel 拡大を生成するような解析関数 F_K を求めよ. この問題は現在でも一般には未解決の問題である. K が有理数体のときは指数関数, 虚二次体のときは j-関数と楕円関数がこの問題に対する解を与えている. また K が CM 体のときは Abel 多様体の虚数乗法により K 上の Abel 拡大を構成することができることが知られている. しかし, これら以外の代数体に対しては (K が実二次体のときでさえ) あまり多くのことはわかっていないのが現状である.

二重正弦関数は K が実二次体のときの解析関数 F_K の候補と考えられている関数である. 実際, 新谷卓郎 [17] は二重正弦関数の等分値の積がある種の Abel 拡大体の単数であると予想し, 特別な場合には予想が正しいことを虚数乗法論を用いて証明した.

二重正弦関数は以下のように定義される. ω_1, ω_2 を 0 でない複素数で, ω_1/ω_2 は負の実数でないようなものとする. $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ とおき, 二重 Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega}) := \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} (x + n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^{-s}$$

と定める. $\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega})$ は $\mathrm{Re}(s) > 2$ のとき絶対収束するが, 複素平面全体に有理型関数として解析接続され, 特に $s = 0$ では正則となる. 二重ガンマ関数, 二重正弦関数はそれぞれ,

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$
$$\mathrm{Sin}_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \Gamma_2(x, \boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_2(\omega_1 + \omega_2 - x, \boldsymbol{\omega})$$

と定義される. より一般の多重正弦関数も同様に定義することができる. 詳しくは [13] を参照されたい.

多重正弦関数は, 上で述べた新谷卓郎によるものに加えて, 整数論において様々な応用を持つことが黒川信重らによって示されている. 具体的には, Riemann ゼータ関数や Dirichlet L-関数の特殊値の表示や, Selberg ゼータ関数のガンマ因子の計算に用いられている. ([13] を参照.) さらに多重正弦関数は数理物理においても応用を持つことが知られており, 例えば, 神保と三輪 [9] は $|q| = 1$ に対する qKZ 方程式の解を二重正弦関数を使って表している.

このように多重正弦関数は様々な興味深い応用を持つが, その性質については現在でも未解明の部分が多い. 例えば, 通常の正弦関数の重要な性質として加法公式が挙げられる. ところが二重正弦関数の加法公式については, 黒川と小山による形式群を用いた研究 [12] があるものの, まだ十分に満足できる成果はないのが現状である.

筆者は, 通常の正弦関数の加法公式は余接関数の加法公式として書くこともできることから, 二重正弦関数とその対数微分として定義される二重余接関数

$$\mathrm{Cot}_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \frac{d}{dx}\log \mathrm{Sin}_2(x, \boldsymbol{\omega})$$

の加法公式の間にも何らかの密接な関係があると考えた. 通常の余接関数は, その分母を払って両辺を x で微分することにより

$$\cot'(x)\cot(y) - \cot(y)\cot'(x+y) - \cot(x)\cot'(x+y) - \cot'(x)\cot(x+y) = 0$$

のように表すこともできる. 筆者は [10] において二重余接関数がこれと類似した公式を満たすかを調べた.

2　主定理とその証明

この節では主定理とその証明の概要を紹介する. 証明の詳細については [10] を参照されたい.

まず, 実数 α がジェネリックであるとは,

$$\lim_{m\to\infty} ||m\alpha||^{1/m} = 1$$

が成り立つことであると定める．ここに実数 x に対して $||x|| := \min\{|x-n|; n\in\mathbb{Z}\}$ とおいた．このジェネリックであるという性質はあまり見慣れない実数の性質であると思われるが, もし α が Liouville 数でない無理数ならば, ジェネリックとなることを示すことができる．

次に

$$\begin{aligned} R(x_1,x_2,\boldsymbol{\omega}) := &-\frac{\pi}{\omega_1}\Biggl(\sum_{k=0}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_1}(x_1+k\omega_2)\zeta_2(4,x_2+k\omega_2,\boldsymbol{\omega}) \\ &\qquad+\sum_{k=1}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_1}(x_1-k\omega_2)\zeta_2(4,x_2-\omega_1-\omega_2-k\omega_2,-\boldsymbol{\omega})\Biggr) \\ &-\frac{\pi}{\omega_2}\Biggl(\sum_{k=0}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_2}(x_1+k\omega_1)\zeta_2(4,x_2+k\omega_1,\boldsymbol{\omega}) \\ &\qquad+\sum_{k=1}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_2}(x_1-k\omega_1)\zeta_2(4,x_2-\omega_1-\omega_2-k\omega_1,-\boldsymbol{\omega})\Biggr). \end{aligned}$$

とおく．右辺の無限級数は以下の主定理の条件が成り立つときには絶対収束している．

定理 2.1 (主定理)**.** *以下のいずれかの条件が成り立つと仮定する:*

(i) $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$.

(ii) $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$.

(iii) $\omega_2/\omega_1, \omega_1/\omega_2$ はともにジェネリックで $y/\omega_1 \notin \mathbb{R}$.

このとき以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cot}_2^{(3)}(x,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2(y,\boldsymbol{\omega})+\mathrm{Cot}_2^{(3)}(x+y,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2(y,\boldsymbol{\omega})-\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x+y,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2^{(3-k)}(x,\boldsymbol{\omega}) \\ &\qquad= -6R(y,\omega_1+\omega_2-x,\boldsymbol{\omega})+6R(y,x+y,\boldsymbol{\omega}). \qquad (2.1) \end{aligned}$$

主定理の証明の方針は、基本的には Eisenstein による通常の余接関数の加法公式の証明を一般化することである．Eisenstein は, 主に余接関数の部分分数分解を用いることで通常の余接関数の加法公式を証明している．([18] を参照.) $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ のとき, 主定理は以下の二重余接関数の部分分数分解を使うことで証明される:

命題 2.2 ([10, Proposition3.3])**.** *二重余接関数は以下のような部分分数分解を持つ:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cot}_2(x,\boldsymbol{\omega}) = &\gamma(\boldsymbol{\omega})+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\omega_1-\omega_2} \\ &+\sum_{\substack{n_1,n_2\ge 0\\(n_1,n_2)\ne(0,0)}}\Biggl(\frac{1}{x+n_1\omega_1+n_2\omega_2}-\frac{1}{x-(n_1+1)\omega_1-(n_2+1)\omega_2} \\ &\qquad-\frac{2}{n_1\omega_1+n_2\omega_2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}\Biggr). \end{aligned}$$

ここに, $\gamma(\boldsymbol{\omega})$ は $\boldsymbol{\omega}$ にのみ依存する定数であり右辺の無限級数は絶対収束している．したがって, $k \geq 1$ のとき

$$\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n_1,n_2\geq 0}\left(\frac{1}{(x+n_1\omega_1+n_2\omega_2)^{k+1}} - \frac{1}{(x-(n_1+1)\omega_1-(n_2+1)\omega_2)^{k+1}}\right)$$

が成り立つ.

ところが $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$ のときは上の証明では, 級数の収束に関して微妙な点がある. そこで $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$ のときは, 符号付き二重 Poisson 和公式という公式を用いる:

命題 2.3 (符号付き二重 Poisson 和公式 [11])**.** 奇関数 $H(t)$ が

$$H(t) \in L^1(\mathbb{R}), \qquad H(t) = O(t^{-2}) \quad (|t| \to \infty)$$

を満たすとし,

$$\widetilde{H}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{itu}dt.$$

とおく．2 つの実数 a, b は $a/b, b/a$ がともにジェネリックであるようなものとする．関数 $H(t)$ がある実数 $\mu \in (0,1)$ に対して

$$\widetilde{H}(x) = O(\mu^x) \quad (x \to \infty)$$

を満たすと仮定する．このとき, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\sum_{k,n>0} H\left(2\pi\left(\frac{k}{a}+\frac{n}{b}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k>0} H\left(2\pi\frac{k}{a}\right) + \sum_{n>0} H\left(2\pi\frac{n}{b}\right)\right)\\ = -\frac{ia}{4\pi}\sum_{k>0}\cot\left(\pi\frac{ka}{b}\right)\widetilde{H}(ka) - \frac{ib}{4\pi}\sum_{n>0}\cot\left(\pi\frac{nb}{a}\right)\widetilde{H}(nb) - \frac{iab}{8\pi^2}\widetilde{H}'(0).\end{aligned}$$

3　主定理の応用 1

この節では, [10] で扱われている, 主定理の応用を紹介する．　まず, 主定理から Dedekind 和の相互法則が従うことを示す．Dedekind 和 $s(h,k)$ は以下のように定義される．h, k を互いに素な正の整数とし,

$$s(h,k) := \sum_{\mu=1}^{k}\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)$$

と定める．ここに

$$((x)) := \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

であり $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

系 3.1 (Dedekind 和の相互法則)**.**

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{hk}+\frac{k}{h}\right).$$

主定理からは, Apostol [1] によって導入された高次 Dedekind 和の相互法則を示すこともできる. Apostol の高次 Dedekind 和 $s_{2r-1}(h,k)$ は, 1 より大きい整数 r に対して,

$$s_{2r-1}(h,k):=\sum_{n=1}^{k}B_{2r-1}\left(\frac{hn}{k}-\left\lfloor\frac{hn}{k}\right\rfloor\right)\left(\left(\frac{n}{k}\right)\right),$$

と定義される. ここに $B_j(x)$ は j 番目の Bernoulli 多項式である.

系 3.2 (高次 Dedekind 和の相互法則)**.**

$$\begin{aligned}&2rhk^{2r-1}s_{2r-1}(h,k)+2rkh^{2r-1}s_{2r-1}(k,h)\\&\qquad=\sum_{m=0}^{r}\binom{2r}{2m}h^{2m}k^{2(r-m)}B_{2m}B_{2r-2m}+(2r-1)B_{2r}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

系 3.1,3.2 を得るには, 等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_1^2\omega_2}c_1'\left(\frac{x}{\omega_1}\right)c_1\left(\frac{x+y}{\omega_2}\right)+\frac{1}{\omega_1\omega_2^2}c_1\left(\frac{x}{\omega_1}\right)c_1'\left(\frac{x+y}{\omega_2}\right)\\&\qquad=-\frac{1}{\omega_2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{c_1\left(\frac{y-m\omega_1}{\omega_2}\right)}{(x+m\omega_1)^2}+\frac{1}{\omega_1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_1\left(\frac{y+n\omega_2}{\omega_1}\right)}{(x+y+n\omega_2)^2}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

を用いる. ここに $c_1(x):=\pi\cot(\pi x)$ とおいた. (3.2) は (2.1) の変数をずらして差分をとることにより得られる等式である. 系 3.1, 3.2 は, (3.2) において $\omega_1=h,\omega_2=k$ とおいて両辺の Laurent 展開の係数を比較すると得られる. 同様にして, (3.2) からは以下の二つの系を得ることができる:

系 3.3 (Lerch の関数等式)**.** *r を 2 以上の整数とし, θ を代数的無理数とする. このとき以下が成り立つ:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cot(\pi m\theta)}{m^{2r-1}}+\theta^{2r-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cot(\pi m/\theta)}{m^{2r-1}}=(-1)^{r-1}(2\pi)^{2r-1}\sum_{k=0}^{r}\theta^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{B_{2r-2k}}{(2r-2k)!}.$$

系 3.4 (Ramanujan の公式)**.** *n を正の整数とする. $\alpha,\beta>0,\alpha\beta=\pi^2$ のとき, 以下が成り立つ:*

$$\begin{aligned}\alpha^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}\right\}&=(-\beta)^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}\right\}\\&\quad-2^{2n}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\frac{B_{2j}B_{2n+2-2j}}{(2j)!(2n+2-2j)!}\alpha^{n+1-j}\beta^j.\end{aligned}$$

系 3.3,3.4 は, それぞれ, (3.2) において $(\omega_1,\omega_2)=(1,\theta),(1,-\pi i/\alpha)$ とした等式から得られる.

注意 3.5. 系 3.3 の左辺の無限級数が絶対収束することは [2, Lemma 1] より従う.

4　主定理の応用 2

この節では, [10] では考察されていない, 主定理の更なる応用を紹介する. この節の内容は [10] とは別の論文で将来扱われる予定である.

主定理からは, 以下の定理を得ることができる:

定理 4.1. *$\psi(x)$ をディガンマ関数, すなわちガンマ関数 $\Gamma(x)$ の対数微分*

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

とし, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \geq 2$ に対して,

$$\zeta(m,n;x_1,x_2) := \sum_{0 \leq k_1 \leq k_2} \frac{1}{(x_1+k_1)^m (x_2+k_2)^n}$$

とおく. すると以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\zeta(1,2;-y,x) + \zeta(1,2;y,x+y) \\ &\qquad = \psi'(x+y)(\psi(x)-\psi(1-y)) + \psi'(x)(\psi(x+y)-\psi(1+y)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

系 4.1 は Eie と Liaw [4] の Proposition 3 と本質的には同じものである. また, 等式 (4.1) の両辺を x, y について Laurent 展開し係数を比較すると, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \geq 2$ に対して以下のような等式が得られる:

$$\begin{aligned} &\zeta(m,n) + (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n+i-1}{i} \zeta(m-i, n+i) \\ &\quad = (-1)^{m-1} \binom{m+n-1}{m} \zeta(m+n) + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} \zeta(n+i)\zeta(m-i) \\ &\qquad\qquad + (-1)^m \sum_{j=1}^{n-2} \binom{m+j-1}{j} \zeta(m+j)\zeta(n-j). \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここに, $\zeta(i,j) \quad (i \geq 1, j > 1)$ は Euler の二重ゼータ値

$$\zeta(i,j) := \sum_{0<k_1<k_2} \frac{1}{k_1^i k_2^j}$$

である. (4.2) は Huard-Williams-Zhang [8] によって得られた等式である. Huard-Williams-Zhang [8] は, 等式（4.2）から, 二重ゼータ値の parity result を証明している. 二重ゼータ値の parity result とは, $i+j$ が奇数のとき $\zeta(i,j)$ は Riemann ゼータ値で表せるという性質のことである. (この性質は一般の深さの多重ゼータ値に一般化されている.)

定理 4.1 を得るには, (2.1) において $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau$ とし, 両辺の $\tau \to i\infty$ の極限をとればよい. この際, 以下の命題を用いる:

命題 4.2. x を $|x|<1$ なる複素数とし, γ を *Euler* 定数

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

とする．このとき

$$\lim_{\tau\to\infty}\{\mathrm{Cot}_2(x,(1,\tau))-\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))\}=-\psi(x)-\gamma$$

および, $k\geq 1$ に対して

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x,(1,\tau))=-\psi^{(k)}(x)$$

が成立する.

さて, 二重余接関数は余接関数の一般化であるが, 命題 4.2 により, ディガンマ関数の一般化であるとみなすこともできる．そこで, ディガンマ関数やガンマ関数の性質が二重余接関数や二重正弦関数に一般化されるか考えるのは自然である.

ガンマ関数の重要な性質として超超越性, すなわち代数的微分方程式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$
$$(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, F(x,Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\in\mathbb{C}(x)[Y_0,Y_1,\cdots,Y_n])$$

を満たさないことが挙げられる．この定理は Hölder [7] によって証明された．(なお Hölder は二重三角関数を発見した数学者でもある．詳しくは [6] を参照されたい．)

上の Hölder の証明を一般化することにより以下の定理を示すことができる:

定理 4.3. 実数ではない複素数 τ に対して, 関数 $f(x)$ が差分関係式

$$f(x+\tau)=f(x)(2\sin(\pi x))^{-1} \tag{4.3}$$

を満たせば, $f(x)$ は超超越的である.

二重正弦関数 $\mathrm{Sin}_2(x,(1,\tau))$ は差分関係式 (4.3) を満たす．よって ω_1/ω_2 が実数でなければ, $\mathrm{Sin}_2(x,\boldsymbol{\omega})$ は超超越的であることがわかる．さらに Ostrowski[16] の結果を用いることにより, この結果はより一般の多重三角関数に拡張される:

定理 4.4. r を 2 以上の整数とし, 集合 $\{\omega_j/\omega_i|1\leq i<j\leq r\}$ の中に実数でないものが存在すると仮定する．このとき r 重正弦関数 $\mathrm{Sin}_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は超超越的である.

一方, ω_i/ω_j がすべて有理数のときは $\mathrm{Sin}_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は代数的微分方程式を満たすことが黒川と若山 [14] によって証明されている.

5　主定理の楕円ディガンマ関数への一般化

最近筆者は, 主定理を楕円ガンマ関数の対数微分として定義される関数（筆者は楕円ディガンマ関数と呼んでいる）の満たす加法型公式に拡張した．楕円ガンマ関数は $z, \tau, \sigma \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\tau), \mathrm{Im}(\sigma) > 0$ に対して,

$$\Gamma(z, \tau, \sigma) := \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i((j+1)\tau + (k+1)\tau - z)}}{1 - e^{2\pi i(j\tau + k\sigma + z)}}$$

と定義される特殊関数である．楕円ガンマ関数は二重正弦関数と Jacobi のテータ関数の共通の一般化とみなすことができる．(楕円ガンマ関数の基本的性質については Felder-Varchenko[5] や成川 [15] が詳しい.) もし時間の余裕があれば, 講演ではこの一般化についてもお話したい.

参考文献

[1] T. M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formula of certain Lambert series, Duke Math. J. **17** (1950), 147-157.

[2] T. Arakawa, Generalized eta-functions and certain ray class invariants of real quadratic fields, Math. Ann. **260** (1982), 475-494.

[3] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Phil. Soc. **19** (1904), 374-425.

[4] M. Eie and W. -C. Liaw, Double Euler sums on Hurwitz zeta function, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), 1869-1883.

[5] G. Felder and A. Varchenko, The elliptic gamma function and $SL(3, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$, Adv. Math. **156** (2000), 44-76.

[6] O. Hölder, Ueber eine transcendente Function, Göttingen Nachrichten (1886), 514-522.

[7] O. Hölder, Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Ann. **28** (1887), 1-13.

[8] J. G. Huard, K. S. Williams and N-U. Zhang, On Tornheim's double series, Acta Arithmetica **75** (1996), 105-117.

[9] M. Jimbo and T. Miwa, Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 2923-2958.

[10] M. Kato, An addition type formula for the double cotangent function, Kodai Math. J. **40** (2017), 468-491.

[11] S. Koyama and N. Kurokawa, Multiple zeta functions: the double sine function and the signed double Poisson summation formula, Compositio Math. **140** (2004), 1176-1190.

[12] S. Koyama and N. Kurokawa, Formal group laws for multiple sine functions and applications, Kodai Math. J. **36** (2013), 109-118.

[13] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, Forum Math. **15** (2003), 839-876.

[14] N. Kurokawa and M. Wakayama, Differential algebraicity of multiple sine functions, Lett. Math. Phys. **71** (2005), 75-82.

[15] A. Narukawa, The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions, Adv Math. **189** (2004), 247-267.

[16] A. Ostrowski, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z. **8** (1920), 241-298.

[17] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 139-167.

[18] A.Weil, Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, Berlin, 1976.