

# Folding procedure for Newton-Okounkov polytopes of flag varieties

東京工業大学理学院数学系 藤田 直樹 (Naoki Fujita)\*<sup>†</sup>  
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

## 概要

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり、トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている。本稿では表現論と密接な関係を持つ旗多様体の Newton-Okounkov 凸体に着目し, folding と呼ばれる異なる種類のディンキン図形の間関係が Newton-Okounkov 凸体にどのように反映されているのかについて考察する。応用として B 型と C 型の結晶基底の間に存在するある種の類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与える。

## 1 導入

Newton-Okounkov 凸体は偏極多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり, Okounkov [20, 21, 22] によって導入された後 Kaveh-Khovanskii [12] および Lazarsfeld-Mustata [14] によって系統的な定義がなされ, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張として注目されている。特に多面体となっている Newton-Okounkov 凸体を Newton-Okounkov 多面体という。Newton-Okounkov 多面体は元々の射影多様体の情報を数多く含んでいると考えられており, 実際にその理論を用いることでトーリック多様体への退化 (トーリック退化) や可積分系を構成することができる [1, 7]。

本稿では表現論と密接な関係を持つ旗多様体の Newton-Okounkov 多面体を取り扱う。Kaveh [11] は旗多様体のある付値 (highest term valuation) に関する Newton-Okounkov 多面体がストリング・パラメトリゼーションという柏原結晶基底のあるパラメトリゼーションから作られる多面体 (ストリング多面体) と一致していることを見出した。筆者は大矢浩徳氏との共同研究 [6] において, シューベルト多様体の列に沿って零点の位数を測っていくことにより得られる幾何学的により自然な付値に着目し, 対応する Newton-Okounkov 多面体もストリング多面体と一致していることを証明した。本稿では, この多面体に古典型のディンキン図形の folding がどのように反映されているのかについて説明する。具体的には B 型および C 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体をそれぞれ A 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体の切断および射影として実現する (ただし C 型の旗多様体の偏極は A 型の旗多様体の偏極から誘導されるものに限る)。応用として B 型と C 型の結晶基底の間に存在するある種の類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与える。

本稿の結果はシューベルト多様体の Newton-Okounkov 多面体や例外型の場合まで自然に拡張することができる。本稿の詳細を記述した論文 [5] が Comm. Algebra に受理されている。

## 2 Newton-Okounkov 多面体

ここでは Newton-Okounkov 多面体の定義および応用について説明する ([1, 7, 12, 13] 参照)。 $X$  を複素  $N$  次元既約正規射影多様体とし, 既約正規閉部分多様体の列

$$X_\bullet: X_N \subset X_{N-1} \subset \cdots \subset X_0 = X$$

であって, 各  $0 \leq k \leq N$  に対して  $\dim_{\mathbb{C}}(X_k) = N - k$  となるものを考える。  $\eta_k$  を  $X_k$  の生成点とすると, 正規性より茎  $(\mathcal{O}_{X_{k-1}})_{\eta_k}$  は離散付値環である。  $\text{ord}_{X_k}: \mathbb{C}(X_{k-1}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  を対応する付値とし, 極大イ

\*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp

<sup>†</sup>日本学術振興会特別研究員 (DC1)

デアルの生成元  $t_k \in (\mathcal{O}_{X_{k-1}})_{\eta_k}$  を固定する. このとき  $X_\bullet$  に沿って零点および極の位数を測っていくことにより付値  $v_{X_\bullet}: \mathbb{C}(X) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^N$  が定まる:

$$v_{X_\bullet}(f) = (a_1, \dots, a_N) \Leftrightarrow a_1 := \text{ord}_{X_1}(f), a_2 := \text{ord}_{X_2}((f/t_1^{a_1})|_{X_2}), \dots$$

**定義 2.1** ([7, 12, 13] 参照).  $\mathcal{L}$  を  $X$  上の非常に豊富な直線束とし,  $0$  でない切断  $\tau \in H^0(X, \mathcal{L})$  を固定する. 半群  $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$  を

$$S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) := \bigcup_{k>0} \{(k, v_{X_\bullet}(\sigma/\tau^k)) \mid \sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) \setminus \{0\}\}$$

と定義する. さらにこの  $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$  を含む最小の実閉錐を  $C(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$  とし, 集合  $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{R}^N$  を

$$\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)\}$$

と定める. この  $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$  を **Newton-Okounkov 凸体** といい, 多面体となっている Newton-Okounkov 凸体を **Newton-Okounkov 多面体** という.

次が Newton-Okounkov 多面体のトーリック退化に対する応用である.

**定理 2.2** ([1, Theorem 1]). 半群  $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$  が有限生成のとき, 射影多様体  $X$  は (正規とは限らない) トーリック多様体

$$X_0 := \text{Proj}(\mathbb{C}[S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)])$$

に退化する;  $X_0$  の正規化は Newton-Okounkov 多面体  $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$  に対応する正規トーリック多様体である.

### 3 スtring多面体との関係

本節ではシューベルト多様体の列  $X_\bullet$  に関する付値  $v_{X_\bullet}$  と結晶基底の関係を与えた論文 [6] の結果を紹介する. 簡単のため  $A_n$  型に限って話を進めよう.

$$G = SL_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A: (n+1)\text{-次複素正方行列} \mid \det(A) = 1\}$$

とし,  $B \subset G$  を上三角行列全体のなす部分群 (ボレル部分群) とする. このとき商多様体  $G/B$  を旗多様体という.  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$  を単位ベクトルとし,  $1 \leq i \leq n+1$  に対して  $E_i \subset \mathbb{C}^{n+1}$  を  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i$  で生成される  $\mathbb{C}$ -部分空間とする. このとき旗多様体  $G/B$  は次の写像により  $\mathbb{C}^{n+1}$  の旗全体のなす集合と同一視される:

$$\begin{aligned} G/B &\rightarrow \{(0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i, 1 \leq i \leq n+1\}, \\ g \text{ mod } B &\mapsto (0 \subset gE_1 \subset \dots \subset gE_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A: (n+1)\text{-次複素正方行列} \mid \text{tr}(A) = 0\}$  を  $G$  のリー代数とし,  $1 \leq i, j \leq n+1$  に対して  $E_{i,j}$  を  $(i,j)$ -成分のみ 1 で他の成分は 0 である  $(n+1)$ -次正方行列とする. このときリー代数  $\mathfrak{g}$  は

$$E_i := E_{i,i+1}, F_i := E_{i+1,i}, H_i := E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, 1 \leq i \leq n,$$

で生成される;  $\{E_i, F_i, H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  を  $\mathfrak{g}$  の **Chevalley 生成元** という. 集合  $P_{++}$  を

$$P_{++} := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \lambda_{n+1} = 0\}$$

と定義する. 各  $\lambda \in P_{++}$  に対して  $G/B$  上の直線束  $\mathcal{L}_\lambda$  を  $\mathcal{L}_\lambda := (G \times \mathbb{C})/B$  と定める; ここで  $B$  の  $G \times \mathbb{C}$  への右作用は,  $b \in B$  の対角成分を  $d_1, \dots, d_{n+1}$  としたとき,

$$(g, c) \cdot b := (gb, d_1^{\lambda_1} \dots d_{n+1}^{\lambda_{n+1}} c)$$

で与えられる.

**命題 3.1.** 集合  $\{\mathcal{L}_\lambda \mid \lambda \in P_{++}\}$  は  $G/B$  上の非常に豊富な直線束全体の集合と一致する.

$[n] := \{1, \dots, n\}$  とし,  $N := \dim_{\mathbb{C}}(G/B) = n(n+1)/2$  とする.

**定義 3.2.** 次の写像が双有理射となるような語  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in [n]^N$  を簡約語という:

$$\mathbb{C}^N \rightarrow G/B, (t_1, \dots, t_N) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_N F_{i_N}) \bmod B.$$

**例 3.3.** 次の語  $\mathbf{i}$  は簡約語である:

$$\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in [n]^N.$$

簡約語  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in [n]^N$  に対して, 上記の双有理射  $\mathbb{C}^N \rightarrow G/B$  を用いて関数体  $\mathbb{C}(G/B)$  を有理関数体  $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$  と同一視する.  $t_1, \dots, t_N$  を変数とする単項式たちの間の全順序  $\prec$  を次で定義する:  $(a_1, \dots, a_N), (a'_1, \dots, a'_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  に対し,

$$t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} \prec t_1^{a'_1} \cdots t_N^{a'_N} \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について, } a_N = a'_N, \dots, a_{k+1} = a'_{k+1}, a_k < a'_k.$$

各  $1 \leq k \leq N$  に対して, 旗多様体  $G/B$  の閉部分多様体  $X_k$  を集合  $\{\exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_k F_{i_k}) \bmod B \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}\}$  のザリスキー閉包として定義する;  $X_k$  はシューベルト多様体と呼ばれる多様体であり, 既約かつ正規であることが知られている.  $e \in G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$  を単位行列とし, シューベルト多様体の列

$$X_\bullet := \{e \bmod B\} \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N = G/B$$

に関する付値  $v_{X_\bullet}: \mathbb{C}(G/B) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^N$  を  $v_i$  と書く. 上述の同一視  $\mathbb{C}(G/B) \simeq \mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$  のもとで, 付値  $v_i$  は次のように計算することができる.

**命題 3.4.**  $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$  に対して  $v_i(f/g) = v_i(f) - v_i(g)$  であり,

$$f = ct_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} + (\prec \text{ に関する higher terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$$

に対して  $v_i(f) = (a_N, \dots, a_1)$  である; ただし  $c \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とする.

**例 3.5.**  $G = SL_3(\mathbb{C})$  とする. このとき  $N = 3$  であり,  $f = t_1 t_2 + t_3^2 \in \mathbb{C}(G/B) \simeq \mathbb{C}(t_1, t_2, t_3)$  に対して  $v_i(f) = (0, 1, 1)$  となっている.

$\lambda \in P_{++}$  に対して最高ウェイト  $\lambda$  の既約最高ウェイト  $G$ -加群を  $V(\lambda)$  とし, 最高ウェイトベクトルを  $v_\lambda \in V(\lambda)$  とする. Borel-Weil の定理により大域切断のなす空間  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  は双対加群  $V(\lambda)^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\lambda), \mathbb{C})$  と同型な  $G$ -加群である. Lusztig [16, 17, 18] および柏原 [8] は  $V(\lambda)$  のある特別な  $\mathbb{C}$ -基底  $\{G_\lambda^{\text{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$  を  $\mathfrak{g}$  に付随する量子包絡代数を用いて構成した. この基底を標準基底または下側大域基底という. ここで  $\mathcal{B}(\lambda)$  は次のような付加構造 (結晶構造) を持っている:

$$\text{wt}: \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}, \quad \varepsilon_i, \varphi_i: \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \tilde{e}_i, \tilde{f}_i: \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathcal{B}(\lambda) \cup \{0\}, \quad i \in [n];$$

$\mathcal{B}(\lambda)$  を結晶基底といい, 作用素  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  を柏原作用素という.  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  および  $i \in [n]$  に対して次が成り立つ:

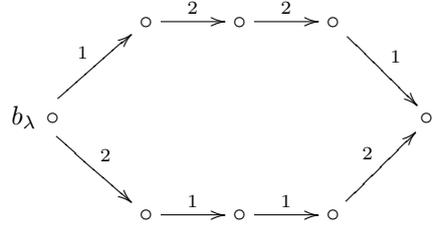
$$\begin{aligned} \text{wt}(b_\lambda) &= \lambda, \\ \varepsilon_i(b) &= \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \\ \varphi_i(b) &= \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\}, \\ e_i \cdot G_\lambda^{\text{low}}(b) &\in \mathbb{C}^\times G_\lambda^{\text{low}}(\tilde{e}_i b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\lambda); \varphi_i(b') > \varphi_i(\tilde{e}_i b)} \mathbb{C} G_\lambda^{\text{low}}(b'), \\ f_i \cdot G_\lambda^{\text{low}}(b) &\in \mathbb{C}^\times G_\lambda^{\text{low}}(\tilde{f}_i b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\lambda); \varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(\tilde{f}_i b)} \mathbb{C} G_\lambda^{\text{low}}(b'); \end{aligned}$$

ここで  $b_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$  は  $G_\lambda^{\text{low}}(b_\lambda) \in \mathbb{C}^\times v_\lambda$  により定まる元であり, 最高ウェイト元と呼ばれる.

**定義 3.6** ([9] 参照). 結晶  $\mathcal{B}$  の結晶グラフとは,  $\mathcal{B}$  を頂点集合とし次で定まる矢を持つ有向グラフのことである:

$$b \xrightarrow{i} b' \Leftrightarrow b' = \tilde{f}_i b.$$

**例 3.7.**  $G = SL_3(\mathbb{C})$  とし,  $\lambda = (2, 1, 0)$  とする. このとき結晶基底  $\mathcal{B}(\lambda)$  の結晶グラフは次で与えられる:



**定義 3.8** ([2, Section 3.2] および [15, Section 1] 参照).  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in [n]^N$  を簡約語とする.  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  に対して  $\Phi_{\mathbf{i}}(b) = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  を

$$\begin{aligned} a_1 &:= \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_1}^a b \neq 0\}, \\ a_2 &:= \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_2}^a \tilde{e}_{i_1}^{a_1} b \neq 0\}, \\ &\vdots \\ a_N &:= \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_N}^a \tilde{e}_{i_{N-1}}^{a_{N-1}} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{a_1} b \neq 0\} \end{aligned}$$

と定義する; この非負整数の組  $\Phi_{\mathbf{i}}(b)$  を  $b$  の  $\mathbf{i}$  に関するストリング・パラメトリゼーションという.

**定義 3.9** ([11, Definition 3.5] および [15, Section 1] 参照).  $\mathbf{i} \in [n]^N$  を簡約語とし,  $\lambda \in P_{++}$  とする. 部分集合  $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$  を

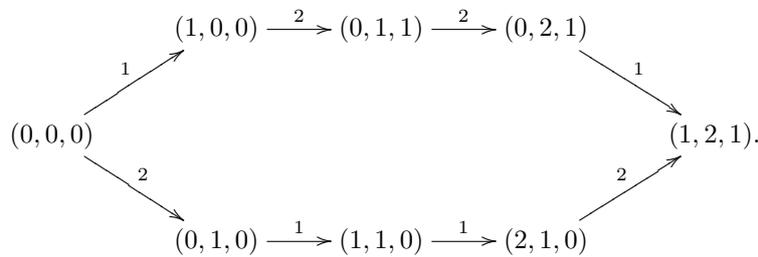
$$\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda) := \bigcup_{k>0} \{(k, \Phi_{\mathbf{i}}(b)) \mid b \in \mathcal{B}(k\lambda)\}$$

と定義し,  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$  を  $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda)$  を含む最小の実閉錐とする. さらに集合  $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}^N$  を

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda)\}$$

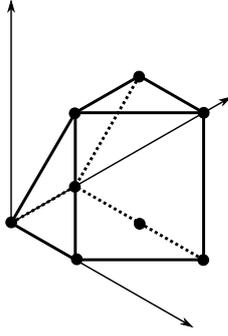
と定める. この集合  $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$  をストリング多面体という.

**例 3.10.**  $G = SL_3(\mathbb{C})$  とし,  $\lambda = (2, 1, 0)$  とする. このとき簡約語  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$  に関するストリング・パラメトリゼーション  $\Phi_{\mathbf{i}}: \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$  は次で与えられる:



さらにストリング多面体  $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$  は次の不等式系を満たす  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  全体のなす集合と一致する:

$$0 \leq a_3 \leq 1, \quad a_3 \leq a_2 \leq a_3 + 1, \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 - 2a_3 + 1.$$



$\tau_\lambda \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V(\lambda)^*$  を

$$\tau_\lambda(G_\lambda^{\text{low}}(b)) := \begin{cases} 1 & (b = b_\lambda), \\ 0 & (b \neq b_\lambda) \end{cases}$$

と定義する.  $\tau_\lambda$  は  $G$ -加群  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$  における最低ウェイトベクトルとなっている.  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$  に対して  $\mathbf{a}^{\text{op}} := (a_N, \dots, a_1)$  とし,  $H \subset \mathbb{R}^N$  に対して  $H^{\text{op}} := \{\mathbf{a}^{\text{op}} \mid \mathbf{a} \in H\}$  とする. 次が論文 [6] の主結果である.

**定理 3.11** ([6, Corollary in Introduction]).  $\mathbf{i} \in [n]^N$  を簡約語とし,  $\lambda \in P_{++}$  とする. このとき Newton-Okounkov 多面体  $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_i, \tau_\lambda)^{\text{op}}$  はストリング多面体  $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$  と一致する.

#### 4 固定点部分群

この節では本稿の主結果について説明する. 異なる型の代数群や結晶基底などを区別するため,  $G^{A_n}$  や  $\mathcal{B}^{A_n}(\lambda)$  のように対応する型を添え字として付けることにする.  $G^{A_{2n-1}} = SL_{2n}(\mathbb{C})$  に対して, 代数群の自己同型  $\omega: SL_{2n}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} SL_{2n}(\mathbb{C})$  を  $\omega(A) := w_0^{-1} A^{-1} w_0$  と定義する; ここで

$$w_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in SL_{2n}(\mathbb{C})$$

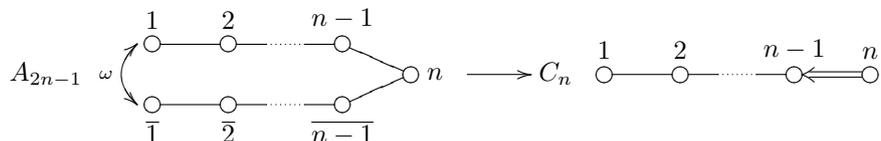
である. このとき固定点部分群

$$SL_{2n}(\mathbb{C})^\omega := \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid \omega(A) = A\}$$

は  $w_0$  により定まる  $\mathbb{C}^{2n}$  上のシンプレクティック形式  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := {}^t \mathbf{x} w_0 \mathbf{y}$  に関するシンプレクティック群

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2n}\}$$

と一致している. また固定点部分群  $B^{C_n} := (B^{A_{2n-1}})^\omega$  は  $Sp_{2n}(\mathbb{C})$  のボレル部分群となっており,  $C_n$  型の旗多様体  $Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}$  は自然に  $A_{2n-1}$  型の旗多様体  $SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}$  の閉部分多様体と同一視できる. 以上のことは下図のようにディンキン図形の言葉で理解することができる:  $A_{2n-1}$  型のディンキン図形を位数 2 の自己同型  $\omega$  で折りたたむ (folding) ことで  $C_n$  型のディンキン図形が得られている.



$A_{2n-1}$  型および  $C_n$  型のディンキン図形の頂点集合をそれぞれ上図のように  $I := \{i, \bar{i} \mid 1 \leq i \leq n\}$  および  $\check{I} := [n] = \{1, \dots, n\}$  を用いて添え字付ける; ただし  $\bar{n} := n$  である. 写像  $\check{I} \hookrightarrow I, i \mapsto i$ , により  $\check{I}$  を  $I$  における  $\omega$ -軌道の完全代表系とみなすことにする. このとき各  $i \in \check{I}$  および  $t \in \mathbb{C}$  に対して,  $\omega(\exp(tF_i)) = \exp(tF_{\bar{i}})$  となっている. また  $\omega(B^{A_{2n-1}}) = B^{A_{2n-1}}$  であるため,  $\omega$  は旗多様体  $SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}$  の自己同型を誘導する.

$$(P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega := \{\lambda \in P_{++}^{A_{2n-1}} \mid \omega^*(\mathcal{L}_\lambda) = \mathcal{L}_\lambda\}$$

と書き, 写像  $(P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega \rightarrow P_{++}^{C_n}, \lambda \mapsto \hat{\lambda}$ , を  $\mathcal{L}_{\hat{\lambda}} = \mathcal{L}_\lambda|_{Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}}$  により定義する. この写像は単射であることが知られている.  $N := \dim_{\mathbb{C}}(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n})$  とし,  $\mathbf{i} = \mathbf{i}^C = (i_1, \dots, i_N) \in \check{I}^N$  を  $C_n$  型の簡約語とする. 簡約語  $\mathbf{i}^C$  は  $A_{2n-1}$  型の簡約語

$$\mathbf{i}^A = (i_{1,1}, \dots, i_{1,m_{i_1}}, \dots, i_{N,1}, \dots, i_{N,m_{i_N}})$$

を誘導する; ただし各  $1 \leq k \leq N$  に対して,

$$(i_{k,1}, \dots, i_{k,m_{i_k}}) := \begin{cases} (i_k, \bar{i}_k) & (i_k = 1, \dots, n-1), \\ (n) & (i_k = n) \end{cases}$$

である. これらの簡約語  $\mathbf{i}^C$  および  $\mathbf{i}^A$  を用いて, 関数体  $\mathbb{C}(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n})$  および  $\mathbb{C}(SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}})$  をそれぞれ有理関数体  $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$  および  $\mathbb{C}(t_{1,1}, \dots, t_{1,m_{i_1}}, \dots, t_{N,1}, \dots, t_{N,m_{i_N}})$  と同一視する. 全射  $\mathbb{R}$ -線形写像  $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} : \mathbb{R}^{m_{i_1} + \dots + m_{i_N}} \rightarrow \mathbb{R}^N$  を

$$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}(a_{1,1}, \dots, a_{1,m_{i_1}}, \dots, a_{N,1}, \dots, a_{N,m_{i_N}}) := (a_{1,1} + \dots + a_{1,m_{i_1}}, \dots, a_{N,1} + \dots + a_{N,m_{i_N}})$$

と定める. 次が本稿の主結果である.

**定理 4.1 (F).**  $\mathbf{i} \in \check{I}^N$  を簡約語とし,  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  とする. このとき次が成り立つ:

$$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}(\Delta(SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}, \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}^A}, \tau_\lambda)^{\text{op}}) = \Delta(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}, \mathcal{L}_{\hat{\lambda}}, v_{\mathbf{i}^C}, \tau_{\hat{\lambda}})^{\text{op}}.$$

## 5 軌道リ一代数

この節では  $B_n$  型および  $D_{n+1}$  型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体との関係について説明する.

**定義 5.1** ([3, 4] 参照). 固定点部分リ一代数  $\text{Lie}((G^{A_{2n-1}})^\omega) = \text{Lie}(Sp_{2n}(\mathbb{C})) = \mathfrak{g}^{C_n}$  のラングランズ双対  $\mathfrak{t}(\mathfrak{g}^{C_n}) \simeq \mathfrak{g}^{B_n}$  を  $\omega$  の軌道リ一代数という.

$$B_n \begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array} \text{---} \dots \text{---} \begin{array}{c} n-1 \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} n \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\text{ラングランズ双対}} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array} \text{---} \dots \text{---} \begin{array}{c} n-1 \\ \circ \end{array} \text{---} \begin{array}{c} n \\ \circ \end{array}$$

上図のように  $B_n$  型のディンキン図形の頂点集合も  $\check{I} = [n]$  を用いて添え字付ける. このとき,  $C_n$  型の簡約語  $\mathbf{i}^C \in \check{I}^N$  は  $B_n$  型の簡約語  $\mathbf{i}^B \in \check{I}^N$  とみなすことができる. 軌道リ一代数  $\mathfrak{g}^{B_n}$  に対して, 集合  $P_{++}^{B_n}$  は  $(P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  と同一視できることが知られている.  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  に対応する  $P_{++}^{B_n}$  の元を  $\check{\lambda}$  と書くことにする. このとき結晶基底  $\mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$  は次のようにして結晶基底  $\mathcal{B}^{A_{2n-1}}(\lambda)$  の中に埋め込むことができる.

**命題 5.2** ([19, Proposition 3.2.1] 参照). 写像  $P_\lambda : \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda}) \hookrightarrow \mathcal{B}^{A_{2n-1}}(\lambda)$  であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

$$(i) P_\lambda(b_\lambda^{B_n}) = b_\lambda^{A_{2n-1}},$$

(ii) すべての  $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$  および  $1 \leq i \leq n-1$  に対して,

$$P_\lambda(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \tilde{e}_{\check{i}} P_\lambda(b), \quad P_\lambda(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \tilde{f}_{\check{i}} P_\lambda(b),$$

$$P_\lambda(\tilde{e}_n b) = \tilde{e}_n P_\lambda(b), \quad P_\lambda(\tilde{f}_n b) = \tilde{f}_n P_\lambda(b)$$

が成り立つ; ただし  $P_\lambda(0) := 0$  である.

写像  $P_\lambda$  の条件から次が示される.

**命題 5.3.**  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \check{I}^N$  を簡約語とし, 単射  $\mathbb{R}$ -線形写像  $\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}: \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{m_{i_1} + \dots + m_{i_N}}$  を

$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(a_1, \dots, a_N) := \underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{m_{i_1}}, \dots, \underbrace{(a_N, \dots, a_N)}_{m_{i_N}}$$

と定義する. このときすべての  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  および  $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$  に対して,

$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Phi_{\mathbf{i}^B}(b)) = \Phi_{\mathbf{i}^A}(P_\lambda(b))$$

が成り立つ.

**系 5.4.**  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \check{I}^N$  を簡約語とする. このとき  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  に対して次が成り立つ:

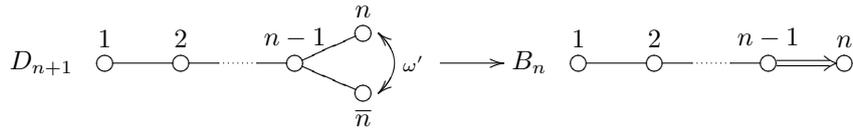
$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Delta_{\mathbf{i}^B}(\check{\lambda})) = \{(a_{k,l})_{1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq m_{i_k}} \in \Delta_{\mathbf{i}^A}(\lambda) \mid a_{k,1} = \dots = a_{k,m_{i_k}}, 1 \leq k \leq N\}.$$

$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}$  および  $\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}$  の定義により,  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$  に対して  $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(a_1, \dots, a_N) = (a'_1, \dots, a'_N)$  とすると, 各  $1 \leq k \leq N$  に対して

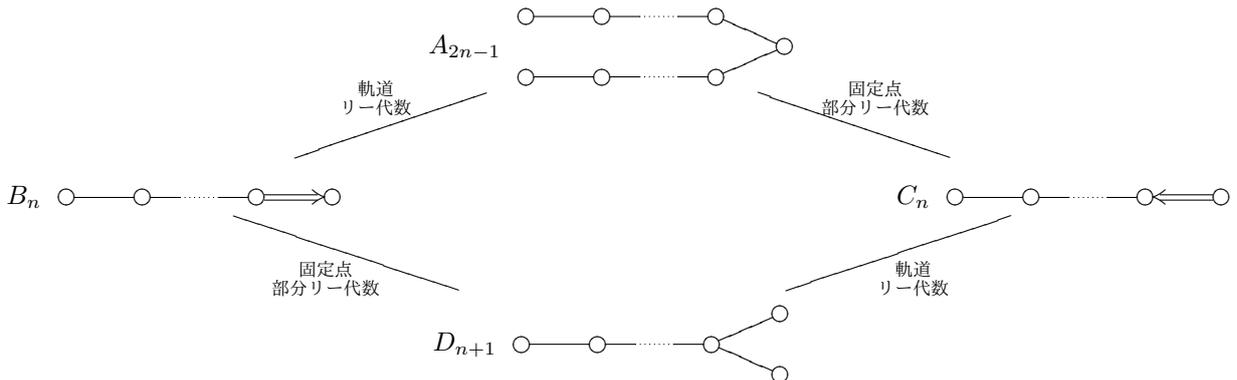
$$a'_k = \begin{cases} 2a_k & (i_k = 1, \dots, n-1), \\ a_k & (i_k = n) \end{cases} \quad (1)$$

となっている. 次節で述べるようにこの合成写像  $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}$  が  $B_n$  型と  $C_n$  型の結晶基底の間に存在するある種の類似性を記述している.

$D_{n+1}$  型のディンキン図形の位数 2 の自己同型  $\omega'$  に関する folding を考えよう.

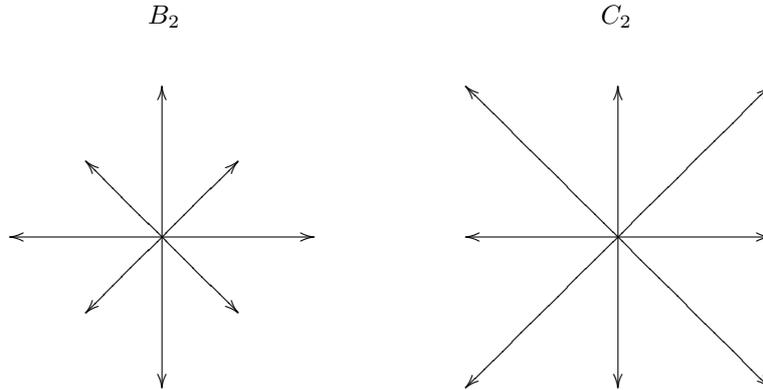


このとき固定点部分リー代数は  $B_n$  型の単純リー代数であり, 軌道リー代数は  $C_n$  型の単純リー代数である. そのため以上の議論は  $A_{2n-1}, B_n, C_n, D_{n+1}$  型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体の間の関係を与えている.



## 6 柏原結晶基底の類似性

最後に Newton-Okounkov 多面体に対する folding の手法と結晶基底の類似性の間の関係について述べる.  $B_n$  型のルート系は  $C_n$  型のルート系における短ルートの長さをすべて 2 倍にしたものであることが知られている. 逆に  $C_n$  型のルート系は  $B_n$  型のルート系における短ルートの長さをすべて 2 倍にすることで得ることができる.



この事実を反映して  $B$  型と  $C$  型の結晶基底の間には次のような類似性が存在する.

**命題 6.1** ([10, Section 5] 参照).  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  に対して, 写像  $S_\lambda^{B,C}: \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda}) \rightarrow \mathcal{B}^{C_n}(\hat{\lambda})$  であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

(i)  $S_\lambda^{B,C}(b_\lambda^{B_n}) = b_\lambda^{C_n},$

(ii) すべての  $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$  および  $1 \leq i \leq n-1$  に対して,

$$S_\lambda^{B,C}(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i^2 S_\lambda^{B,C}(b), \quad S_\lambda^{B,C}(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i^2 S_\lambda^{B,C}(b),$$

$$S_\lambda^{B,C}(\tilde{e}_n b) = \tilde{e}_n S_\lambda^{B,C}(b), \quad S_\lambda^{B,C}(\tilde{f}_n b) = \tilde{f}_n S_\lambda^{B,C}(b)$$

が成り立つ; ただし  $S_\lambda^{B,C}(0) := 0$  である.

この類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与えよう.

**命題 6.2.**  $\mathbf{i} \in \check{I}^N$  を簡約語とする. このときすべての  $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$  および  $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$  に対して次が成り立つ:

$$\Phi_{\mathbf{i}}(S_\lambda^{B,C}(b)) = \Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Phi_{\mathbf{i}}(b)).$$

## 参考文献

- [1] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, *Math. Ann.* **356** (2013), 1183–1202.
- [2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* **143** (2001), 77–128.
- [3] J. Fuchs, U. Ray, and C. Schweigert, Some automorphisms of generalized Kac-Moody algebras, *J. Algebra* **191** (1997), 518–540.
- [4] J. Fuchs, B. Schellekens, and C. Schweigert, From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 39–97.
- [5] N. Fujita, Folding procedure for Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties, preprint 2017, arXiv:1703.03144v1. To appear in *Comm. Algebra*.
- [6] N. Fujita and H. Oya, A comparison of Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **96** (2017), 201–227.
- [7] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, *Invent. Math.* **202** (2015), 927–985.

- [8] M. Kashiwara, On crystal bases of the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465–516.
- [9] M. Kashiwara, On crystal bases, in *Representations of Groups (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.
- [10] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, *Contemp. Math.* **194** (1996), 177–186.
- [11] K. Kaveh, Crystal bases and Newton-Okounkov bodies, *Duke Math. J.* **164** (2015), 2461–2506.
- [12] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology*, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser, 2012, 263–282.
- [13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Ann. of Math.* **176** (2012), 925–978.
- [14] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, *Ann. Sci. de l'ENS* **42** (2009), 783–835.
- [15] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups* **3** (1998), 145–179.
- [16] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 447–498.
- [17] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 365–421.
- [18] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, 1993.
- [19] S. Naito and D. Sagaki, Crystal bases and diagram automorphisms, in *Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups*, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, Math. Soc. Japan, 2004, 321–341.
- [20] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, *Invent. Math.* **125** (1996), 405–411.
- [21] A. Okounkov, Multiplicities and Newton polytopes, in *Kirillov's Seminar on Representation Theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 181, Adv. Math. Sci. Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 231–244.
- [22] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in *The Orbit Method in Geometry and Physics*, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329–347.